Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин
Математическая шкатулка

Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин

Математическая шкатулка

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Издание четвертое,
переработанное и дополненное

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1984

ББК 22.1я72
Н16

Рекомендовано Главным управлением
школ Министерства просвещения СССР

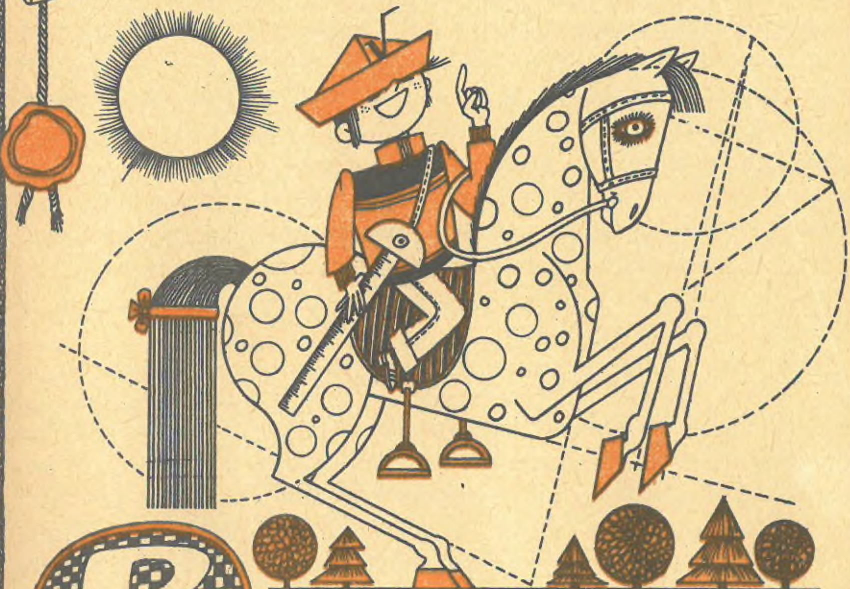
Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С.

Н16 Математическая шкатулка: Пособие для учащихся.— 4-е изд., перераб. и доп.— М.: Просвещение, 1984.— 160 с., ил.

Пособие содержит задачный материал для внеклассной работы по математике учащихся 4—8 классов средней школы.

Н $\frac{4306020400-737}{103(03)-84}$ 209 —84

ББК 22.1я72
51(075)



ВВЕДЕНИЕ

> **...Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно*.**
>
> *А. Н. Колмогоров.*

ПРОЧИТАЙТЕ!

М. И. Калинин говорил в 1941 г. учащимся средних школ Ленинского района г. Москвы: «Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики. А кто из вас не мечтает теперь стать моря-

* Колмогоров А. Н. О профессии математика. М., 1957.

ком, летчиком, артиллеристом, квалифицированным рабочим в различных отраслях нашей промышленности, строителем, металлургом, слесарем, токарем и т. д., опытным полеводом, животноводом, садоводом и т. д.?.. Но все эти профессии требуют хорошего знания математики. И потому, если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе»*. Эти замечательные слова М. И. Калинина надо не только хорошо помнить. Нужно упорно и настойчиво овладевать математическими знаниями и навыками, учиться применять их на практике. Без этого невозможно подготовить себя к активному участию в строительстве коммунизма.

Дело не только в том, что знание математики необходимо для очень многих специальностей, и особенно технических. Нашей стране, строящей коммунизм, требуются тысячи высокообразованных специалистов, владеющих математикой и ее методами. Вот почему у нас в стране большое внимание уделяется математическому образованию подрастающего поколения.

В средней школе математику изучают с 1-го по 10-й класс, уроков за это время проводится много. Разумеется, каждый ученик должен хорошо усваивать все то, что излагает учитель, тщательно выполнять все задания. Но для того чтобы в дальнейшем можно было бы овладеть специальностью, так или иначе связанной с математикой ее методами, ее применениями, этого недостаточно. Необходимы самостоятельная творческая работа и сознательное отношение к изучению этого трудного предмета.

Было бы грубой ошибкой думать, что математика — это застывшая, законченная наука, что достаточно усвоить уже известные формулы, правила и теоремы. В действительности, математика, как и другие науки, непрерывно развивается, обогащается новыми теориями, перестраивается в ответ на новые запросы жизни. И здесь не труднее, чем в других науках, добраться до возможности открывать новое. Многие ученые, в том числе русские и советские, начинали самостоятельные исследования и серьезную научную работу довольно рано, с 18—20 лет, но перед этим упорно и настойчиво изучали основы математики в средней школе. Вот несколько примеров.

* Калинин М. И. О воспитании и обучении. М., 1957.

Один из выдающихся советских математиков — Лев Семенович Понтрягин родился в 1908 г. Четырнадцати лет от несчастного случая он потерял зрение, но это не убило в нем стремления к науке. В 1925 г., шестнадцати лет, Лев Понтрягин окончил среднюю школу. В школьные годы он не только хорошо изучил школьный курс математики, но самостоятельно осваивал и многие разделы высшей математики. После окончания средней школы Понтрягин поступил в университет и уже через два года выполнил свою первую научную работу, посвященную важной отрасли математики — топологии, а еще через два года блестяще окончил Московский университет, затем закончил аспирантуру при нем и в короткое время зарекомендовал себя как талантливый ученый. Двадцати двух лет он выступил с изложением своих открытий на Всесоюзном математическом съезде. В 1939 г. Лев Семенович был избран членом-корреспондентом, а в 1958 г. — академиком Академии наук СССР. В 1941 г. за выдающиеся открытия ему была присуждена Государственная премия, в 1962 г. Л. С. Понтрягин удостоен Ленинской премии за труды в области математики, а в 1969 г. ему присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Один из видных советских математиков — Сергей Никитович Мергелян, родившийся в 1928 г., начал упорно заниматься математикой еще в младших классах средней школы. Восьмиклассником он принял участие в математической олимпиаде для десятиклассников и первым решил предложенные задачи. Тогда ему было всего лишь 14 лет. В 1944 г. он сдал экзамены за девятый и десятый классы и вскоре поступил в Ереванский университет. Пятилетний университетский курс С. Мергелян освоил за три года, а последующий трехлетний курс аспирантуры при Академии наук СССР он прошел за полтора года. Первую научную работу Мергелян опубликовал еще в университетские годы, а в начале 1949 г. за выдающуюся научную работу по математике ему была присвоена сразу же степень доктора физико-математических наук. Двадцати лет он стал профессором того университета, в котором совсем недавно учился. В 1953 г. С. Н. Мергелян был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. За свои открытия он был удостоен Государственной премии.

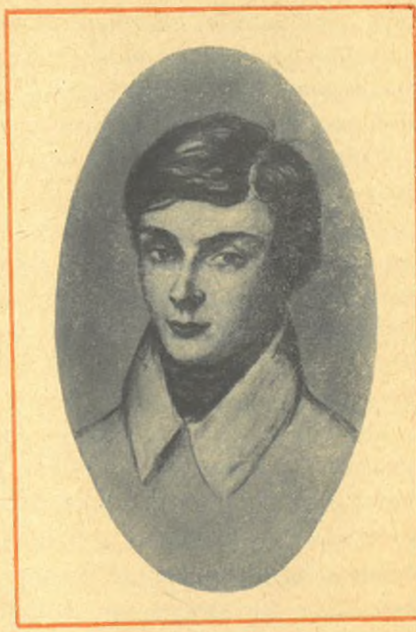
Известный советский математик Лев Генрихович Шнирельман (1905—1938) свои математические способности обнаружил уже двенадцати лет и в этом возрасте начал самостоятельные исследования в области алгебраических уравнений. Когда ему исполнилось 16 лет, он поступил в Московский университет и успешно закончил его за два с половиной года. В 1929 г. Л. Г. Шнирельман окончил аспирантуру, затем стал профессором, а в 1933 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

Рано начал заниматься математикой Сергей Львович Соболев (родился в 1908 г.). Двадцати четырех лет он был избран членом-корреспондентом, а в 1939 г. действительным членом Академии наук СССР. За выдающиеся математические труды Сергей Львович Соболев был удостоен Государственной премии (1941), звания Героя Социалистического Труда. С. Л. Соболев — почетный доктор университета им. Гумбольдта в Берлине, Карлова университета (Прага), член Эдинбургского королевского общества (Англия) и других иностранных академий.

В нашей стране каждый талантливый человек получает все возможности для своего развития. Родина заботливо выращивает таланты, и они пышно расцветают. Совсем иным было отношение к талантливым людям у нас и в других странах в прошлом. Вот несколько примеров.

Одним из наиболее выдающихся математиков XIX в. был норвежский ученый Нильс Хенрик Абель. Родился Абель в 1802 г. Тринадцати лет он был отдан в училище. Выдающиеся способности к занятиям математикой у Абеля обнаружились, когда ему было всего 16 лет. В этом возрасте он полюбил математику и начал упорно заниматься ею. После окончания училища, в 1821 г., Абель поступил в университет и сразу же обратил на себя внимание как талантливый математик. В университетские годы он сделал свое выдающееся открытие об алгебраических уравнениях высших степеней. По окончании университета Абель предпринял поездку в Берлин и Париж. В этих городах, где жили наиболее известные математики, он продолжал напряженные занятия математикой и сделал несколько новых важных открытий. За свою короткую жизнь Абель внес такой вклад в развитие математики, какой дает право считать его одним из величайших математиков. Но открытия Абеля не были поняты и оценены его современниками. В 1824 г. Абель послал свою работу о неразрешимости в радикалах уравнений 5-й степени в общем виде знаменитому не-

Н. Х. АБЕЛЬ
(1802—1829)
«Вместо того, чтобы искать некоторое соотношение... надо спросить, возможно ли такое соотношение...»



Э. ГАЛУА
(1811—1832)
«Я открыл в анализе кое-что новое. Некоторые из этих открытий касаются теории уравнений...»

мецкому математику Гауссу, но тот, к сожалению, ничего не ответил. Таким же было отношение к Абелю и со стороны французских математиков. Они также не сумели оценить огромное дарование молодого норвежского ученого. Одна из наиболее важных работ Абеля долгие годы пролежала в архивах Парижской академии. Не принесли признания Абелю при жизни и те работы, которые ему удалось опубликовать. Так, непризнанным, без средств к жизни и вернулся Абель на свою родину. Там ему пришлось заняться частными уроками, и лишь за год до смерти он получил скромную университетскую должность. Абель постоянно жил в тяжелой нужде. Материальные лишения губительно отразились на его здоровье, и в 1829 г. он скончался от туберкулеза. Печальна история его жизни.

Еще печальнее и короче была жизнь другого гениального французского математика — Эвариста Галуа. «Личность этого человека, — писал о нем известный советский математик

Н. Г. Чеботарев, — представляет совершенно исключительное в истории науки явление»*. Два раза пытался поступить Галуа в знаменитую французскую Политехническую школу, но каждый раз проваливался на вступительных экзаменах. Поступив в менее известную Нормальную школу, Галуа уже через год был исключен из нее за выступление против ее реакционного директора. Так и не получил он специального математического образования, но исключительные математические способности позволили ему сделать замечательные открытия. Математическое дарование Галуа проявилось очень рано. Основные результаты своей замечательной теории, названной его именем, он получил уже в возрасте 16—18 лет.

За свою очень короткую жизнь (21 год) Галуа заложил основы современной алгебры. Созданная им теория алгебраических уравнений высших степеней оказала сильное влияние не только на развитие алгебры, но и всей математики. Идеи и методы, предложенные Галуа, нашли применение в естествознании, в механике, кристаллографии и других науках.

Занятия наукой Галуа соединял с активным участием в бурной политической жизни тогдашней Франции. Он примыкал к обществу «Друзей народа». За публичные выступления против королевского режима, как ярый республиканец и непримиримый враг короля, Галуа неоднократно подвергался арестам.

Математические открытия Галуа при его жизни не были признаны. Свои работы Галуа два раза представлял в Парижскую академию наук, но даже такие крупные математики того времени, как Коши, Фурье и Пуассон, не могли понять значения его открытий. Работы Галуа в Парижской академии предавались забвению или возвращались оттуда с надписью «непонятно».

Математические работы Галуа были разработаны и опубликованы лишь спустя 14 лет после его смерти. Это всего несколько десятков страниц, но содержание их стало одним из краеугольных камней фундамента современной математики**.

В дореволюционной России талантливые люди, выходившие из народа, также подвергались преследованиям. Тяжелой была жизнь русского математика Тимофея Федоровича Оси-

---

* Чеботарев Н. Г. Теория Галуа. М., 1936.

** Прочитайте книгу: Инфельд Л. Эварист Галуа. М., 1958.

повского. Продолжительное время он работал профессором и ректором Харьковского университета. Взгляды Осиповского были передовыми. Он не скрывал своих убеждений, последовательно и настойчиво разъяснял их, не боясь затронуть чье-либо самолюбие, не боясь испортить свое служебное положение. Царское правительство не могло мириться со свободомыслием Осиповского, и Тимофей Федорович, так много сделавший для процветания Харьковского университета, был отстранен от работы и лишен средств существования. Последние годы его жизни прошли в тяжелых материальных условиях, в нужде и лишениях.

Преследованиям подвергался и великий русский математик, ученик Осиповского — Михаил Васильевич Остроградский. Он был обвинен в вольнодумстве, в безбожии. Ему не только было отказано в звании кандидата наук, но даже был отнят аттестат об окончании Харьковского университета. После четырех лет обучения в университете Остроградский остался без документа об его окончании, хотя он три раза успешно сдал все требующиеся экзамены*. А ведь впоследствии М. В. Остроградский стал членом Российской академии.

Терпел преследования и гениальный русский математик Николай Иванович Лобачевский. Еще в студенческие годы Лобачевский за свои убеждения многократно подвергался различным взысканиям. Университетское начальство за проявленные Лобачевским признаки безбожия собиралось исключить его из Казанского университета и отдать в солдаты. И только решительное заступничество профессоров, занимавшихся с Лобачевским, спасло его от грозившей ему страшной участи. Позднее, когда Лобачевский сделал свое гениальное открытие, когда он опубликовал несколько работ, посвященных открытой им новой геометрии, его научный подвиг все же не был оценен. Замечательные идеи Лобачевского при его жизни не получили признания. Больше того, открытие Лобачевского было осмеяно, над ним издевались, его унижали и оскорбляли. И когда в 1893 г., через 37 лет после смерти Лобачевского, Казанский университет обратился в министерство просвещения с просьбой разрешить отпраздновать столетие со дня рождения Лобачевского, министерство запросило университет, кто

---

* Прочитайте книгу: Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. М., 1952.

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ
(1792—1856)
«...Все в природе подлежит измерению, все может быть сосчитано».

М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ
(1801—1862)
«Все отвлеченные понятия пояснять, как только можно, и примерами, и задачами, и приложениями...»

такой Лобачевский и какие научные заслуги он имеет. Не прекратились преследования Лобачевского и в последние годы его жизни. После всего того, что он сделал для Казанского университета, для народного образования, для науки, его, еще полного сил, энергии и новых замыслов, уволили «на покой», как если бы он был дряхлым стариком. Тяжелее удара нельзя было нанести. Он одновременно был освобожден и от должности профессора, и от должности ректора университета. Это было оскорбительно грубое отстранение заслуженного ученого от участия в делах того университета, которому он посвятил всю свою жизнь. Насильственное отстранение от деятельности в университете и вызванное этим ухудшение материального положения подорвали здоровье Лобачевского. Он ослеп и вскоре умер.

Таких примеров можно было бы привести больше. Они говорят о том, что в прошлом таланты, выходящие из народа, подвергались гонениям. Советская власть открыла для талантливых людей все дороги и пути. И как нам не радоваться этому! И как не отвечать на заботу Родины прославлением ее успехами в науке и труде. Вот почему наши учащиеся, заинтересовавшиеся математикой, не должны терять времени. Математикой надо заниматься с младших классов. Времени и сил для этого не следует жалеть.

Часто думают, что для занятий математикой необходимы особые способности. Так ли это? Практика обучения математике в средней школе показывает, что обычных средних способностей вполне достаточно для того, чтобы ученик, при правильном руководстве им, сознательно усваивал математику, преподающуюся в средней школе. Математические способности нужны для тех, кто посвятит всю свою жизнь математике.

Какие же это способности? Иногда думают, что успех в математике основан на простом запоминании большого числа правил, формул, теорем и т. д. Конечно, хорошая память для занятий математикой нужна, но очень многие выдающиеся ученые-математики никакой особой памятью не обладали и именно систематические занятия математикой часто помогали им развивать ее. Значительно важней, чем память, для занятий математикой — умение находить наиболее удачные пути решения задач, тождественных преобразований, решения уравнений и т. д. Очень важно также научиться пользоваться наглядными, в том числе геометрическими представлениями при изучении различных вопросов математики, при решении разнообразных задач (графические иллюстрации, графики и т. д.). Особенно ценно для всех желающих заниматься математикой развивать логическое мышление, умения правильно, обоснованно и последовательно рассуждать. Все эти способности, необходимые для математиков, не даются человеку готовыми при рождении. Они развиваются и крепнут в ходе творческого изучения математики. Нужно только любить эту науку и упорно заниматься ею.

В математике усвоение всего действительно ценного и значительного требует напряженных усилий. Еще больше усилий требует научное творчество в математике. Способности для специальных занятий математикой необходимы, но недостаточны. Математический талант — это прежде всего напряженный, хорошо организованный труд. Помните об этом!

Часто говорят, что математика скучна. Так думают нерадивые ученики и люди, далеко стоящие от математики. Спросите кого-либо из математиков — кажется ли ему математика скучной? Вы услышите — нет! Математика суха и скучна для тех, кто дальше начатков ее не ушел. Математика пленяет всех тех, кто достаточно продвигается в ее изучении. Недаром выдающаяся русская женщина-математик Софья Васильевна Ковалевская писала*: «Многие, которым никогда не представлялось случая более узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего времени** говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе». Даже об арифметике два с половиной века тому назад один из первых русских математиков-педагогов — Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) писал, что это «...художество частное, независимое и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее». Даже в отдаленном прошлом у нас находилось немало людей — «числолюбцев», увлекавшихся решением арифметических и геометрических задач. С тех пор в математике многое изменилось. Особенно бурно развивается математика в последние десятилетия. И в наши дни, пожалуй, не найдется ни одного школьника, заинтересовавшегося математикой, который не мог бы не согласиться с такими словами талантливого советского мате-

С. В. КОВАЛЕВСКАЯ
(1850—1891)
«...Нельзя быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе».

* Прочитайте о С. В. Ковалевской книгу: Воронцова Л. Софья Ковалевская. М., 1959.

** Имеется в виду выдающийся немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815—1897), у которого С. В. Ковалевская училась.

матика Н. Г. Чеботарева: «В математике красота играет громадную роль».

В этой книге представлены разнообразные задачи для учащихся 4—8-х классов. Некоторые из них или похожие на них иногда можно увидеть на страницах журналов, в различных книгах по математике. Но здесь есть достаточно много интересных задач, интересных даже для учащихся старших классов. В этом сборнике задач есть и легкие, есть и трудные, замысловатые задачи и вопросы. Иначе говоря, эта книга является своеобразной математической шкатулкой.

«Математическая шкатулка» предназначена прежде всего нашим пионерам. Кому, как не им, быть застрельщиками в распространении интересных математических задач и их решений!

Как использовать «Математическую шкатулку»? Прежде всего пытайтесь сами решать понравившиеся задачи и отвечать на вопросы. Думайте над ними, соображайте, ищите возможно более простые и красивые решения. Может случиться так, что задача не будет «поддаваться». Тогда заглядывайте в ответы и указания, но не злоупотребляя этим. Если же и указания не помогут разобраться, то обращайтесь за помощью к старшим товарищам, к вожатому, к своим учителям математики. Не огорчайтесь, если сразу не можете решить задачу. Уже то полезно, что думали над ней, пробовали различные подходы к решению, даже если не решили. Размышления над задачами, поиски решений развивают ваше мышление, сообразительность, способствуют повышению уровня математической грамотности.

Помните, что в математике, пожалуй, самое интересное — это задачи. Вместе с тем это и самое трудное. Не бойтесь трудностей. Об этом прекрасно сказал К. Маркс: «В науке нет широкой столбовой дороги, и только тот может достигнуть ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам»*.

* Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 23, с. 25.

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Изучите азы науки, прежде чем взойти на ее вершины. Никогда не беритесь за последующее, не усвоив предыдущее.

И. П. Павлов

БЕЗ КАРАНДАША И БУМАГИ

1. У троих братьев оказалось вместе 9 карандашей. У младшего — на 1 карандаш меньше, а у старшего — на 1 карандаш больше, чем у среднего брата. Сколько карандашей у каждого из братьев?

2. Если бы Коля купил три тетради, то у него осталось бы 11 к., а если бы он захотел купить 9 таких же тетрадей, то ему не хватило бы 7 к. Сколько денег было у Коли?

3. 4 пуговицы и 3 булавки стоят 26 к., а 2 булавки и 2 пуговицы 14 к. Сколько придется заплатить за: 1) 8 пуговиц и 7 булавок; 2) 8 пуговиц и 4 булавки?

4. То да это да половина того да этого — сколько это будет процентов от трех четвертей того да этого?

5. Рассказывают, что в начальной школе, где учился мальчик Карл Гаусс, ставший потом знаменитым математиком, учитель, чтобы занять класс на продолжительное время самостоятельной работой, дал детям задание — вычислить сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. Но маленький Гаусс это задание выполнил почти моментально. Попробуйте и вы быстро выполнить это задание.

К. Ф. ГАУСС
(1777—1855)

«Математика — царица наук, арифметика — царица математики».

6. В нашей квартире есть стенные часы с боем. Они отбивают целые часы и одним ударом каждые полчаса. Сколько ударов в сутки делают эти часы?

7. Как быстро вычислить: 1) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 997 + 999$? 2) $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \dots + 7 - 5 + 3 - 1$?

8. У известного русского художника Богданова-Бельского есть картина*, изображающая занятия устным счетом (рис. 1). В классе возле доски сидит учитель, а около него стоят ученики, занятые устным решением трудного примера. Ученики сосредоточены и увлечены работой, так как пример действительно труден и интересен.

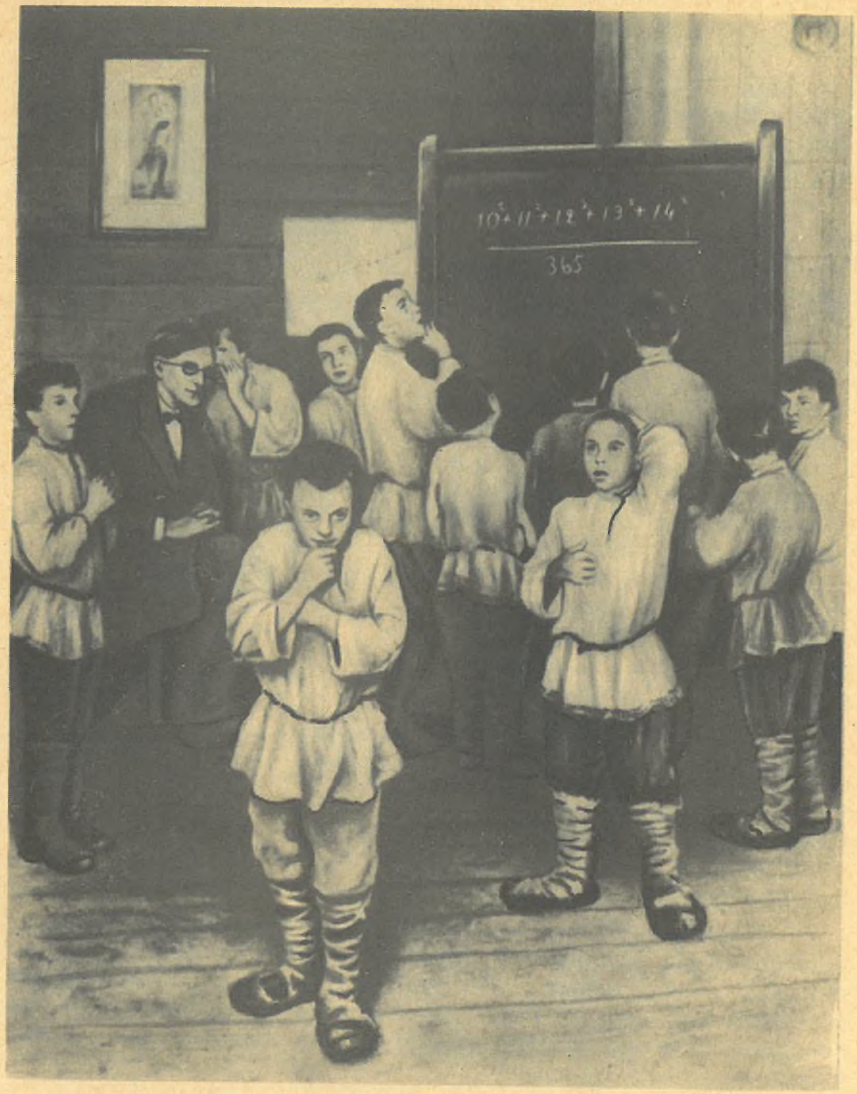
Вот он:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Решите и вы этот пример устно.

---

* На картине «Устный счет» художник изобразил учеников сельской школы старого, дореволюционного времени. Учитель на этой картине — это известный педагог С. А. Рачинский. Картина хранится в Третьяковской галерее.



1

9. Найдите простой прием вычислений и воспользуйтесь им для вычисления суммы: 1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+$ $+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$; 2) $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+$ $+\frac{1}{13\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}$.

10. 1) Найдите возможно быстрее, какое частное и какой остаток получатся при делении числа $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+1$ на 5.

2) Вычислите: $1\,000\,000-(1\,000\,000-(1\,000\,000-(1\,000\,000-(1\,000\,000-999\,999))))$.

ЧИСЛОВЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

11. Как нужно разрезать циферблат часов на 6 частей так, чтобы во всех частях сумма чисел была одинакова?

12. Запишите, пользуясь тремя пятерками и знаками действий: 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 5.

13. Пользуясь пятью двойками и знаками действий, запишите число 28.

14. Пользуясь четырьмя двойками и знаками действий, запишите число 111.

15. Запишите число 100, пользуясь знаком «+» и: 1) четырьмя девятками, 2) шестью девятками. (Допускается использование дробной черты.)

16. Запишите число 31, пользуясь знаками действий и: 1) пятью тройками, 2) шестью тройками, 3) пятью пятерками.

17. Запишите 100, пользуясь знаками действий и: 1) пятью единицами, 2) пятью тройками, 3) пятью пятерками.

18. Напишите девять цифр: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Не меняя порядка этих цифр, расставьте между ними плюсы и минусы, всего три знака, таким образом, чтобы в результате получилось 100.

19. С помощью четырех четверок и известных вам знаков действий запишите все натуральные числа от 1 до 10.

20. Запишите число 100, использовав все 10 цифр и знаки некоторых действий.

21. Какие знаки арифметических действий нужно поставить между восемью двойками, записанными одна за другой, чтобы результат этих действий был равен 8?

22. Какие знаки арифметических действий нужно поставить вместо знаков вопроса в записи $5?\ \frac{5?\ \ 5?\ \ 5}{5}$, чтобы получить 8? Чтобы получить 20?

23. 1) Как нужно расставить знаки «+» в записи 1 2 3 4 5 6 7, чтобы получилась сумма, равная 100?

2) Как нужно расставить знаки «+» в записи 9 8 7 6 5 4 3 2 1, чтобы получилась сумма, равная 99?

24. Какое целое число делится (без остатка) на любое целое число, отличное от 0?

25. 1) Сумма каких двух натуральных чисел равна их произведению?

2) Сумма каких двух натуральных чисел больше, чем их произведение?

26. 1) Найдите число, одна треть и одна четверть которого составляет 21.

2) Полтрети — число 100. Что это за число?

27. Что больше: 10^{20} или 20^{10}?

28. Что больше: 100^{20} или 9000^{10}?

29. Какое натуральное число в 7 раз больше цифры его единиц?

30. Какое наибольшее число можно записать при помощи: 1) трех единиц; 2) четырех единиц?

31. Напишите возможно меньшее натуральное число, пользуясь тремя двойками и знаками действий.

32. Напишите, пользуясь двумя цифрами и знаками действий, возможно меньшее число.

33. Какую последнюю цифру может иметь квадрат натурального числа? Куб его? Четвертая степень?

34. Могут ли числа 458, 523, 652 быть квадратами или кубами целого числа?

35. Тремя тройками (четверками), не употребляя знаков действий, записать возможно большее число.

36. Напишите, использовав 3 цифры, наибольшее возможное число.

37. Сколько раз следует взять слагаемым a, чтобы получить a^n? Какие значения при этом может принимать a?

38. В магазине имелось 6 эмалированных баков емкостью 15, 16, 18, 19, 20 и 31 л. Двое купили 5 баков: один из них два, а второй — три бака, причем оказалось, что емкость первых двух баков вдвое меньше емкости трех баков, приобретенных вторым покупателем. Какой бак остался в магазине?

39. Можно ли 5 яблок разделить между 6 мальчиками поровну, так чтобы не пришлось ни одного яблока резать больше чем на 3 части?

40. Как 7 яблок разделить поровну между 12 мальчиками, не разрезая ни одного яблока больше, чем на 4 части?

41. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4 и при делении на 6 дает в остатке 5.

42. Колхозница привезла на рынок для продажи корзину яиц. Продавала она их по одной и той же цене. После продажи яиц колхозница пожелала проверить, верно ли она получала деньги. Но вот беда: она забыла, сколько у нее было яиц. Вспомнила она только, что когда перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо, одно яйцо оставалось также и при пере-

кладывании яиц по 3, по 4, по 5, по 6. Когда же она перекладывала по 7, то не оставалось ни одного. Помогите колхознице сообразить, сколько в корзине было яиц.

43. Из 4 спичек сложено число VII (семь). 1) Как можно переложить две спички так, чтобы получилось число 5? 2) Как можно переложить одну спичку так, чтобы получилось число 1?

МНОГО ЛИ ЭТО? (БОЛЬШИЕ ЧИСЛА)

44. Во сколько раз километр длиннее миллиметра?

45. Сколько суток составляет миллион минут?

46. Сколько лет составляет миллион часов?

47. Сколько столетий составляет миллион дней? Прошел ли с начала нашего летосчисления миллион дней?

48. Сколько часов, минут и секунд составляет миллион секунд?

49. Сколько километров в миллионе миллиметров?

50. Какое расстояние пройдет человек, сделав миллион шагов, если средняя длина его шага 0,75 м?

51. Сколько биений сделает сердце человека за 75 лет, если в 1 мин оно делает в среднем 75 биений?

52. Даны два произведения: 1) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; 2) $1 \cdot 2 \cdot 3 \times \times 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$. Во сколько раз второе произведение больше первого?

53. Сколько потребовалось бы суток, чтобы написать подряд все числа от единицы до миллиона, если на запись каждой цифры расходовать 1 с и писать 8 ч в сутки?

54. Сколько квадратных миллиметров содержится в квадратном метре? В гектаре?

55. Сколько в кубическом метре содержится кубических сантиметров? Кубических миллиметров?

56. Какой длины получится ряд, если один кубический метр разрезать на кубические миллиметры и уложить их вплотную друг к другу в один ряд?

57. Какой длины получится линия, если кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в одну линию?

58. Сколько столетий в миллиарде минут?

59. Капля воды имеет массу в среднем 0,08 г. Сколько капель в 1 м^3 воды?

60. Пусть наперсток воды имеет массу 1 г (без массы самого наперстка). Какова масса миллиона наперстков воды?

61. Будем считать, что человек в шеренге занимает по длине ее 0,5 м. Какой длины будет шеренга, если выстроить в нее миллион человек?

62. Какую толщину имел бы человеческий волос (средняя толщина волоса 0,07 мм), если бы его удалось увеличить (в толщину) в миллион раз?

63. Может ли человек поднять 3 000 000 $см^3$ пробки (плотность ее 127 $кг/см^3$)?

64. В 1 л морской воды содержится в среднем 0,00001 мг золота. Сколько золота содержится в 1 $км^3$ морской воды?

65. Подсчитайте приближенную толщину одного листа этой книги. С этой целью измерьте толщину всей книги и разделите ее на уменьшенное в два раза число страниц ее. Какую толщину имела бы книга из такой же бумаги в миллион страниц?

66. Узнайте по часам, сколько времени вам понадобится для умножения двух десятизначных чисел, например 4 276 835 102 и 1 502 973 142 (время, расходуемое на запись данных чисел, не считайте). Подсчитайте, сколько вам потребуется времени для выполнения 1 000 000 таких операций. ЭВМ (электронная вычислительная машина) на выполнение 10 000 операций затрачивает около 1 с. Во сколько раз больше времени требуется вам, чем ЭВМ?

Существуют особые названия для достаточно больших чисел. В нашей стране и некоторых других (особенно в практике финансовых расчетов) наибольшее распространение получили следующие названия: миллион — 1000 тысяч, миллиард (биллион) — 1000 миллионов, триллион — 1000 миллиардов, квадриллион — 1000 триллионов, квинтиллион — 1000 квадриллионов, секстиллион — 1000 квинтиллионов и т. д.

Практически эти названия используются редко. Обычно большие числа записываются и читаются с помощью степеней числа 10. Миллион — 10^6, миллиард (биллион) — 10^9, триллион — 10^{12}, квадриллион — 10^{15}, квинтиллион — 10^{18}, секстиллион — 10^{21}, септиллион — 10^{24}, октиллион — 10^{27}, нониллион — 10^{30}, дециллион — 10^{33}. При этом особенно часто используется так называемая (стандартная) форма записи больших и малых чисел. Данное число представляют в виде произведения числа, большего 0, но меньшего 10, и соответствующей степени 10. Так, число 4 230 000 000 (четыре миллиарда двести тридцать миллионов) запишется в виде $4{,}23 \cdot 10^9$. Показатель степени 10 в стандартной форме записи числа (в данном случае 9) часто называется порядком числа.

67. В XVII в. на Руси была создана стройная система счисления, названная «великим словенским числом». Слово «тьма» обозначало тысячу тысяч, «тьму тем» называли «легионом» или «леодром», «леодр леодров» — «вороном». В одной из рукописей того времени есть упоминание и о большем числе, которое называлось «колодой» и равнялось десяти «воронам». Об этом числе летописец говорит: «Сего числа несть больше».

Какое же это число в десятичной системе счисления? Запишите его в виде степени 10. Есть ли большее число?

68. Масса Земли $\approx 5{,}976 \cdot 10^{27}$ г, масса Солнца $\approx 1{,}99 \cdot 10^{33}$ г. Запишите эти числа обычным способом (в килограммах, тоннах).

69. Наибольшее расстояние от Земли до Плутона (самой далекой известной планеты нашей системы) $\approx$ 7 527 000 000 км, расстояние до звезды Сириус $\approx$ 81 900 000 000 000 км, до звезды Вега $\approx$ 249 500 000 000 000 км, до самых удаленных туманностей, едва видимых в современные телескопы, $\approx$ 2 000 000 000 000 000 000 000 км. Запишите эти числа в стандартной форме.

70. Земля при своем движении вокруг Солнца проходит путь в 936 250 000 км в год. Какое расстояние проходит Земля за 1 сутки? (Считайте год в среднем равным 365,25 суток.)

71. Скорость света в вакууме $\approx 3{,}00 \cdot 10^5$ км/с. Какое расстояние проходит свет в течение года?

72. Расстояние от Земли до звезды Ближайшая Центавра свет проходит за $4\frac{1}{3}$ года. Сколько километров до этой звезды?

73. В астрономии для выражения расстояний в солнечной системе применяется астрономическая единица, равная $1{,}496 \cdot 10^{13}$ см (приближенное значение расстояния от Земли до Солнца). Сколько это километров?

74. В астрономии для выражения расстояний во вселенной используются единицы: парсек = 3,26 световых года и мегапарсек = 1 000 000 парсеков. Выразите эти единицы в километрах.

75. Тончайшая паутиновая нить, если бы ее протянуть по земному экватору, длина которого $\approx$ 40 060 км, имела бы массу 660 г. Какую массу имела бы такая нить, протянутая на расстояние в один мегапарсек?

76. Для выражения малых расстояний (в атомной физике) используется единица длины, равная одной десятой части миллимикрона (1 микрон $= \frac{1}{1000}$ мм $= 10^{-3}$ мм). Сколько это сантиметров?

ВЫЧИСЛИТЕ

77. Вычислите x, пользуясь зависимостью между компонентами (данными) и результатами действий:

1) $(64 - 10x) : 4 + 11 = 22$;
2) $(12 + 34x) \cdot 56 - 789 = 18\,923$;
3) $(10\,000 - 3333x) \cdot 10\,000 - 9999 = 1$;
4) $24\,960 : \left(3360 - \frac{300 \cdot (200 - 6x)}{115}\right) = 8$.

ЗАДАЧИ

Некоторые из приведенных здесь задач легко решаются и без помощи уравнений, другие же для такого решения требуют искусственных приемов, и их легче решать с помощью уравнений или их систем. Выберите самостоятельно удобный способ решения.

78 Во время пионерского похода по родному краю участники его пользуются картой, масштаб которой 1:1 000 000. Сколько понадобится времени, чтобы проехать из одного города в другой на велосипедах со скоростью 12 км/ч, если на карте расстояние между этими двумя городами равно 0,6 дм?

79. Пионеры ехали на автомашине из лагеря в город. Когда они проехали $\frac{3}{4}$ пути, автомашина была остановлена для ремонта. Оставшуюся часть пути пионеры проделали пешком, затратив на это времени в 4 раза больше, чем они ехали на автомашине. Во сколько раз быстрей ехали пионеры на автомашине, чем шли пешком?

80. Из толстой железной проволоки в мастерской могут сделать цепь, состоящую из 80 или из 100 звеньев. Если сделать цепь из 100 звеньев, то каждое звено ее будет на 5 г легче, чем в том случае, если бы цепь сделали из 80 звеньев. Какую массу имеет проволока?

81. 30 пирожных стоят на 3 р. дороже, чем 40 пирожков. Те же 30 пирожных стоят на 2 р. 10 к. дороже, чем 50 таких же пирожков. Сколько стоят одно пирожное и один пирожок?

82. На три склада доставлен груз. На первый и второй склады доставлено 400 т, на второй и третий — 300 т, а на первый и третий — 440 т. Сколько тонн груза было доставлено на каждый склад в отдельности?

83. Два брата разговорились о том, сколько у них денег для покупки футбольного мяча. Старший говорит младшему: «Дай мне 80 к., тогда у меня будет денег в два раза больше, чем у тебя». Младший, подумав, ответил: «Нет, у тебя и так больше денег, чем у меня. Лучше ты дай мне 80 к., тогда денег у нас будет поровну». Сколько денег было у каждого брата?

84. На двух кустах сидели 16 воробьев. Со второго куста улетели 2 воробья, а затем с первого куска на второй перелетели 5 воробьев. После этого на каждом кусте оказалось одно и то же число воробьев. Сколько воробьев было вначале на каждом кусте?

85. Велосипедист должен попасть в место назначения к определенному сроку. Известно, что если он поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше, а если скорость будет 10 км/ч, то опоздает на 1 ч. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

86. Десять слив имеют такую же массу, как три яблока и одна груша, а шесть слив и одно яблоко — как одна груша. Сколько слив нужно взять, чтобы их масса была равна массе одной груши?

87. Рыбак поймал рыбу. Когда у него спросили, какова масса пойманной рыбы, он сказал: «Я думаю, что хвост ее — 1 кг, голова — столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Какова же масса этой рыбы?

88. Вода при замерзании увеличивается на $\frac{1}{11}$ часть своего объема. На какую часть своего объема уменьшится лед при обратном превращении в воду?

89. Сколько сейчас времени, если до конца суток осталось $\frac{4}{5}$ того, что уже протекло от начала суток?

90. Дочери в настоящее время 8 лет, а матери 38. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?

91. Когда отцу было 37 лет, то сыну было только 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

92. Ученику, работающему в столярной мастерской, дали доску длиной 3 м и сказали, что надо разрезать ее поперек на 2 части так, чтобы число метров в большей части было равно числу дециметров в меньшей. Как ученик должен разрезать эту доску?

93. Для туристов закуплено 100 билетов на поезд на общую сумму 340 р. Билеты стоимостью по 3 и 4 р. Сколько закуплено билетов по 3 р. и сколько — по 4 р.?

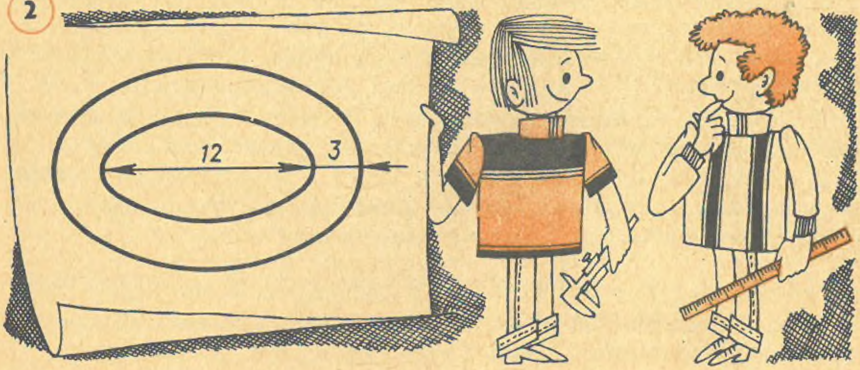
94. Имеющийся в магазине картофель был развешен в 24 пакета, по 5 кг и по 3 кг. Масса всех пакетов по 5 кг оказалась равной массе всех пакетов по 3 кг. Сколько было тех и других пакетов?

95. На одну чашку весов положили кусок сыра, а на другую — $\frac{3}{4}$ такого же куска и еще $\frac{3}{4}$ кг. Установилось равновесие. Какова масса куска сыра?

96. Собака погналась за лисицей, находящейся от нее на расстоянии 120 м. Через сколько времени собака догонит лисицу, если лисица пробегает в минуту 320 м, а собака — 350 м?

97. По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со средней скоростью 8 км/ч. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается

2



обратно и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за все это время собака?

98. Яша идет от дома до школы 30 мин, а брат его Петя — 40 мин. Петя вышел из дома на 5 мин раньше Яши. Через сколько минут Яша догонит Петю?

99. Два грузовика в одно время выехали из пункта a в пункт b. Достигнув пункта b, каждый из грузовиков повернул обратно в a. Первый грузовик двигался все время с одной и той же скоростью, а второй из a в b двигался со скоростью в 2 раза меньшей, чем первый, но зато обратно из b в a его скорость была в 2 раза больше скорости первого. Какой грузовик раньше вернется в пункт a?

100. Собака погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от нее. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы — 1 м. В то время как лисица делает 3 скачка, собака делает 2 скачка. Какое расстояние должна пробежать собака, чтобы догнать лисицу?

101. Три подружки договорились к праздничному столу купить 12 пирожных. Первая из них купила 5 штук, вторая — 7, а третья вместо своей доли пирожных внесла 1 р. 20 к. Как подружки должны разделить между собой эти деньги?

102. Из сорока звеньев составлена цепь. Просвет каждого звена 12 мм, а толщина звена 3 мм (рис. 2). Какую длину имеет эта цепь?

103. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо столба — за 15 с. Вычислите длину поезда и его скорость.

104. Грузовик проезжает некоторое расстояние за 10 ч. Если бы он проезжал в час на 10 км больше, то ему потребовалось бы на тот же путь 8 ч. Какими были это расстояние и скорость движения грузовика?

105. Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл к пристани назначения на полчаса

раньше срока. Сколько времени потребовалось пароходу на весь путь?

106. Некий гражданин, живя за городом, обычно приезжал на вокзал в город одним и тем же электропоездом. К прибытию этого поезда подходил и автобус, которым этот гражданин ехал до места своей работы. Однажды он приехал на вокзал на час раньше обычного (другим поездом) и прошел некоторое время пешком. Затем сев в догнавший его на одной из остановок автобус, гражданин приехал на работу на 20 мин раньше обычного. Сколько времени он шел пешком?

НЕКОТОРЫЕ СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ*

107. Купил некто трех сукон 106 аршин (1 аршин $\approx$ $\approx$ 71,12 сантиметра), единого взял 12-ю аршин больше перед другим, а другого 9-ю больше перед третьим, и ведательно есть, колико коего сукна взято было. (Из старинной книги «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, начало XVIII в. Рисунок 3 — первая страница этой книги, служившей одним из первых учебников математики в России.)

108. Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей,— отвечает ему вожак стада,— если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да полстолька, да четверть столька, да еще ты, гусь, с нами, так тогда нас было бы сто гусей». Сколько было в стае гусей?

109. Говорят, что на вопрос о том, сколько у него учеников, древнегреческий математик Пифагор ответил так: «Половина моих учеников изучает математику, четвертая часть изучает природу, седьмая часть проводит время в молчаливом размышлении, остальную часть составляют 3 девы». Сколько учеников было у Пифагора?

110. Некий человек на вопрос, сколько он имеет денег, ответил: «Аще придастся к моим деньгам толико же, елико имам, и полтолика, и $\frac{3}{4}$, и $\frac{2}{3}$, и убавится из всего 50 рублев, и тогда будет у меня 100 рублев, и ведательно есть, колико той человек имяше денег». (Магницкий.)

111. В клетке находятся фазаны и кролики. У всех животных 35 голов и 94 ноги. Сколько в клетке кроликов и сколько фазанов?

112. В некоей единой мельнице были трои жерновы, и едины жерновы в сутки могут смолоти 60 четвертей (четверть $\approx$ 6 пудов, 1 пуд $\approx$ 16,38 кг), а другие в толикое же время могут смолоти 54 четверти, третьи же в толикое же вре-

* Старинные задачи приводятся и в некоторых других местах этой книги.

3

Аріѳметіка практіка или деятелная.

Что есть аріѳметіка;

Аріѳметіка или числителница, есть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, от древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена явлшихся изряднѣйшихъ аріѳметікωвъ, изобрѣтенное, и изложенное.

Колико губа есть аріѳметіка практіка; Есть сугуба.

1 Аріѳметіка політіка, или гражданская.

2 Аріѳметіка логістика, не ко гражданству токмω, но и к движенію небесныхъ круго́въ принадлежащая.

мя могут смолоти 48 четвертей, и некий человек дате жита 81 четверть, желал в скорости оно смолоти, и насыпа на все три жерновы, и ведательно есть, в колико часов оно жито смолотися и колико на всякие жерновы достоит мельнику насыпати. (Магницкий.)

113. В городе Афинах был водоем, в который проведены

3 трубы. Одна из труб может наполнить водоем в один час, другая, более тонкая, в два часа, третья, еще более тонкая,— в три часа. Итак, узнай, в какую часть часа все три трубы вместе наполняют бассейн. (Анания из Ширака (Анания Ширакаци), армянский математик VII в.)

114. В 336-ведерное водохранилище всякие 2 часа одною трубою втекает воды 70 ведер (1 ведро — 12,3 л), а другою трубою вытекает 42 ведра. Спрашивается, в какое время то водохранилище наполнится. (Старинный задачник по арифметике Войтяховского.)

115. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет ту же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особо выпьет ту же кадь. (Магницкий.)

116. Вол съел копну одним часом, а конь съел копну в два часа, а коза съела копну в три часа. Сколько бы они скоро, все три — вол, конь и коза — ту копну съели, сочти. (Математические рукописи XVII в.)

117. Четыре плотника у некоего гостя (купца) нанялись двор ставити. И говорит первый плотник так: «Только бы мне одному тот двор ставити, я бы его поставил един годом». А другой молвил: «Я бы его поставил в два года». А третий молвил: «Я бы его поставил в три года», а четвертый так рек: «Я бы его поставил в четыре года». Все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Скольки долго они ставили, сочти. (Математические рукописи XVII в.)

118. Один путник идет от града в дом, а ходу его будет 17 дней, а другой от дому во град тот же путь творяше, может пройти в 20 дней, оба же сии человека пойдоша во един и тот же час от мест своих, и ведательно есть, в колико дней сойдутся. (Магницкий.)

119. Собака усмотрела в 150 саженях зайца (1 сажень $\approx$ 2,13 м), который перебегает в 2 мин по 500 сажен, а собака в 5 мин — 1300 сажен; спрашивается, в какое время собака догонит зайца. (Задачник Войтяховского.)

120. Одному курьеру приказано прибыть к назначенному месту в 12 дней, к которому он прежде, ехав всякие сутки по 228 верст (1 верста $\approx$ 1,07 км), прибыл в 15 дней. Спрашивается, по сколько верст должен он проезжать в сутки, дабы поспеть к тому месту в назначенное время. (Задачник Войтяховского.)

121. Юноша некий пошел с Москвы к Вологде и идет на всякий день по 40 верст. А другой пошел после его на следующий день, а на всякий день идет по 45 верст. Во сколько дней тот юноша постиг прежнего юношу, сочти. (Математические рукописи XVII в.)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С КОНЦА

122. Я задумал число, прибавил к нему 1, умножил сумму на 2, произведение разделил на 3 и отнял от результата 4. Получилось 5. Какое число я задумал?

123. С рынка возвращались две колхозницы. Одна из них спросила другую: «Что ты продавала?» Ответ был таким: «Я продавала дыни, и получилось так, что первому покупателю я продала половину всех дынь и еще полдыни, второму — половину оставшихся у меня дынь и еще полдыни. Третьему покупателю я продала также половину оставшихся после второго покупателя дынь и еще полдыни. Больше дынь у меня не осталось». Сколько же дынь продала эта колхозница?

124. Мать купила яблоки. Два из них взяла себе, а остальные разделила между тремя своими сыновьями так. Первому она дала половину всех яблок и половину яблока, второму — половину остатка и еще половину яблока, третьему — половину нового остатка и оставшуюся половину яблока. Ни одного яблока при этом разрезать не пришлось. Сколько яблок купила мать? Сколько яблок получил каждый из сыновей?

125. В ящике лежат лимоны. Сначала из него взяли половину всех лимонов и половину лимона, затем половину остатка и еще половину лимона, наконец, половину нового остатка и опять половину лимона. После этого в ящике остался 31 лимон. Сколько лимонов было в ящике вначале?

126. Мать для трех своих сыновей оставила утром тарелку слив, а сама ушла на работу. Первым проснулся старший из сыновей. Увидев на столе сливы, он съел третью часть их и ушел. Вторым проснулся средний. Думая, что его братья еще не ели слив, он съел третью часть того, что было на тарелке, и ушел. Позднее всех встал младший. Увидев сливы, он решил, что его братья еще не ели их, а потому съел лишь третью часть лежавших на тарелке слив, после чего на тарелке осталось 8 слив. Сколько всего слив было вначале?

127. Три брата собрали в саду некоторое количество слив и решили съесть их утром за завтраком. Брат, проснувшийся первым, сосчитал сливы, одну из них положил в карман, чтобы съесть ее потом, а третью часть оставшихся съел. Проснувшийся вторым поступил точно так же: одну сливу положил в карман, а треть оставшихся слив съел. Точно так же поступил и третий из них. Потом, когда они собрались вместе, оставшиеся сливы разделили между собой поровну, выбросив предварительно одну сливу, начавшую портиться. Какое наименьшее возможное число слив могли собрать братья?

128. У моста через речку встретились лодырь и черт. Лодырь пожаловался на свою бедность. В ответ черт предложил:

«Я могу помочь тебе. Каждый раз, как ты перейдешь этот мост, у тебя деньги удвоятся. Но каждый раз, перейдя мост, ты должен будешь отдать мне 24 к». Три раза проходил лодырь мост, а когда заглянул в кошелек, там стало пусто. Сколько же денег было у лодыря?

129. Поверхность пруда постепенно закрывается вырастающими в нем кувшинками. Кувшинки растут столь быстро, что за каждый день закрываемая ими площадь удваивается. Вся поверхность пруда закрылась за 30 дней. За сколько дней была закрыта кувшинками первая половина всей поверхности пруда?

130. Один биолог открыл удивительную разновидность амеб. Каждая из них через минуту делится на две. В пробирку биолог кладет одну амебу, и ровно через час вся пробирка оказывается заполненной амебами. Сколько потребовалось бы времени, чтобы вся пробирка заполнилась амебами, если бы в нее положили вначале не одну амебу, а две?

ПЕРЕЛИВАНИЯ

Многие задачи на переливание жидкостей могут решаться с конца (см. предшествующие задачи). Но можно решать эти задачи путем проб. Правда, это более длинный путь.

131. Можно ли, имея лишь два сосуда емкостью 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 л воды?

132. Как разделить поровну между двумя семьями 12 л хлебного кваса, находящегося в двенадцатилитровом сосуде, воспользовавшись для этого двумя пустыми сосудами: восьмилитровым и трехлитровым?

133. Бидон, емкость которого 10 л, наполнен керосином. Имеются еще пустые сосуды в 7 и 2 л. Как разлить керосин в два сосуда по 5 л каждый?

134. Имеются два сосуда. Емкость одного из них 9 л, а другого 4 л. Как с помощью этих сосудов набрать из бака 6 л некоторой жидкости? (Жидкость можно сливать обратно в бак.)

135. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 л, набрать из водоема ровно 3 л воды?

136. Имеются 3 сосуда вместимостью 8, 5 и 3 л. Первый из них наполнен водой. Как разлить воду в два из этих сосудов так, чтобы в каждом было по 4 л?

137. Имеются сосуды в 12, 9 и 5 л. Первый из них заполнен некоторой жидкостью, а два остальных — пустые. Сколько литров можно отлить из первого сосуда, пользуясь вторым и третьим? Можно ли отлить 6 л?

138. Некто имеет 12 пинт сока (пинта — 0,57 л) и хочет подарить половину своему другу. Но у него нет сосуда в

6 пинт, а есть два сосуда в 8 пинт и 5 пинт. Каким образом можно налить 6 пинт в сосуд емкостью 8 пинт?

Есть очень интересный прием решения таких задач с помощью «умного» бильярдного шарика. Он хорошо описан в книге известного популяризатора математики Я. М. Перельмана «Занимательная геометрия». Обратитесь к этой книге и познакомьтесь, как шарик «решает» задачи на переливание.

ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ ПРОЦЕНТЫ?

139. Найдите (устно): 1) $33\frac{1}{3}\%$ от $33\frac{1}{3}$; 2) число, если $33\frac{1}{3}\%$ его равны $33\frac{1}{3}$; 3) 17% от 25; 4) 72% от 12,5.

140. Пионеры одной дружины совершили туристический поход и провели экскурсию на станцию юных техников. Все они приняли участие в походе или в экскурсии, но некоторые из них были и в походе, и в экскурсии. В походе участвовало 89% всех пионеров, а в экскурсии — 78%. Сколько пионеров (в процентах) участвовали и в походе, и в экскурсии?

141. Магазин продал одному покупателю 25% имевшегося в куске полотна, второму покупателю — 30% остатка, а третьему — 40% нового остатка. Сколько процентов полотна осталось непроданным?

142. Зарплату токарю повысили сначала на 10%, а затем через год еще на 20%. На сколько процентов повысилась зарплата токаря по сравнению с первоначальной?

143. Некоторый товар сначала подорожал на 10%, а затем подешевел на 10%. Как изменилась цена этого товара?

144. Заводской комитет профсоюза выделил на приобретение путевок в пионерские лагеря денег на 20% больше, чем в прошлом году. Цены на такие путевки в этом году снизились на 20%. На сколько процентов повысилось обеспечение путевками в пионерские лагеря детей работников этого завода?

145. Производительность труда при выполнении некоторой работы повысилась на 40%. На сколько процентов сократилось время, необходимое для выполнения этой работы?

146. На заводе было введено рационализаторское предложение. В результате время, необходимое для изготовления рабочим некоторой детали, уменьшилось на 20%. На сколько процентов возросла производительность труда этого рабочего?

147. Петя купил две книги. Первая из них на 50% дороже второй. На сколько процентов вторая книга дешевле первой?

148. Влажность воздуха к полудню по сравнению с утренней снизилась на 12%, а затем к вечеру еще на 5% по сравне-

нию с полуднем. Сколько процентов от утренней влажности воздуха составляет влажность воздуха к вечеру и на сколько процентов она снизилась?

149. Двое рабочих вышли одновременно из одного и того же дома и пошли на один и тот же завод. У первого из них шаг был на 10% короче, чем у второго, но зато он делал шагов на 10% больше, чем второй. Кто из этих рабочих раньше придет на завод?

150. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если периметр его увеличить на 10%?

151. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если длину прямоугольника увеличить на 20%, а ширину — на 10%?

152. Выразите в процентах изменение площади прямоугольника, если длина его увеличится на 30%, а ширина уменьшится на 30%.

153. На сколько процентов увеличится объем (полная поверхность) куба, если длину каждого ребра увеличить на 20%?

154. На сколько процентов увеличится объем прямоугольного параллелепипеда, если длину и ширину его увеличить на 10%, а высоту уменьшить на 10%?

155. Имеется 735 г шестнадцатипроцентного раствора иода в спирте. Нужно получить десятипроцентный раствор иода. Сколько граммов спирта нужно долить для этого к уже имеющемуся раствору?

РАСШИФРУЙТЕ (ВОССТАНОВИТЕ)

В каждой из задач 156—162 одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

156. Расшифруйте запись (буквы обозначают цифры):

$$\mathrm{ankylose} \times \mathrm{ny} = \mathrm{neoneoneo}.$$

157. Расшифруйте запись умножения:

1) $\text{АБ} \cdot \text{ВГ} = \text{БББ}$;

2) $$\begin{array}{r} \times\ \text{ВГД} \\ \text{АБ} \\ \hline +\ \text{ЕДЖ} \\ \text{ВГД}\phantom{\text{Ж}} \\ \hline \text{ББВЖ}; \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} \times\ bc \\ aa \\ \hline +\ bbb \\ bbb \\ \hline bddb; \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} \times\ \text{ДВА} \\ \text{ДВА} \\ \hline +\ \text{ОЛЛО} \\ \text{ЧОЯ}\phantom{\text{О}} \\ \hline \text{ЧИСЛО}; \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} \times\ \text{ТРИ} \\ \text{ТРИ} \\ \hline \text{СРО} \\ +\ \text{ПАР}\phantom{\text{О}} \\ \text{ТРИ}\phantom{\text{ОО}} \\ \hline \text{ЧИСЛО}; \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} \times\ \text{ЛОСИ} \\ \text{ИКС} \\ \hline \text{ПАРИС} \\ +\ \text{ПОТОК}\phantom{\text{С}} \\ \text{ЛОСИ}\phantom{\text{СС}} \\ \hline \text{СССССС}. \end{array}$$

158. Расшифруйте записи:

1) $$\begin{array}{r} \text{А} \\ +\ \text{АБ} \\ \text{АБВ} \\ \hline \text{БВБ}; \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} +\ \text{СИНИЦА} \\ \text{СИНИЦА} \\ \hline \text{ПТИЧКИ}; \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} +\ \text{КАФТАН} \\ \text{КАФТАН} \\ \hline \text{ТРИШКА}; \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} \times\ \text{ГГГГ} \\ \text{ГГГ} \\ \hline \text{АААА}\phantom{\text{АА}} \\ +\ \text{АААА}\phantom{\text{А}} \\ \text{АААА} \\ \hline \text{АБВГДА}; \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r|l} -\ \text{АВСД} & \text{СД} \\ \cline{2-2} \text{СД}\phantom{\text{СД}} & \text{ВСД}; \\ \cline{1-1} -\ \text{ЕС}\phantom{\text{Д}} & \\ \text{ДО}\phantom{\text{Д}} & \\ \cline{1-1} -\ \text{ВСД} & \\ \text{ВСД} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

6) $ab+bc+ca=abc$;

7) $$\begin{array}{r} \text{ОЗОРНИК} \\ \text{ЗОРНИК} \\ \text{ОРНИК} \\ +\ \text{РНИК} \\ \text{НИК} \\ \text{ИК} \\ \text{К} \\ \hline 5553\,3\,2\,1. \end{array}$$

159. Расшифруйте запись $$\begin{array}{r} +\ \text{РЕШИ} \\ \text{ЕСЛИ} \\ \hline \text{СИЛЕН} \end{array}$$

при условии, что «наибольшая» цифра в записи числа «СИЛЕН» равна 5.

160. Расшифруйте запись:

1) $$\begin{array}{r} \text{ОХОХО} \\ +\ \text{АХАХА} \\ \hline \text{АХАХАХ} \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} \text{ТРИ} \\ -\ \text{ДВА} \\ \hline \text{ЯРД}; \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} \text{ТРИ} \\ +\ \text{ДВА} \\ \hline \text{ПЯТЬ}; \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} -\ \text{ПОДАЙ} \\ \text{ВОДЫ} \\ \hline \text{ПАША}; \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} +\ \text{БУЛОК} \\ \text{БЫЛО} \\ \hline \text{МНОГО}. \end{array}$$

161. Расшифруйте запись:

1) $$\begin{array}{ccccc} \text{Н} & \times & \text{ОК} & = & \text{ОХП} \\ + & & \times & & - \\ \text{И} & + & \text{Т} & = & \text{ЛЧ} \\ \hline \text{ЛА} & + & \text{ЛНЧ} & = & \text{ЛИК}; \end{array}$$

2) $$\begin{array}{ccccc} \text{ЕЕ} & \times & \text{РС} & = & \text{ЕНВ} \\ + & & \times & & - \\ \text{АИ} & + & \text{О} & = & \text{РКЕ} \\ \hline \text{РРА} & + & \text{ВО} & = & \text{РНТ}; \end{array}$$

3) $$\begin{array}{ccccc} \text{РТ} & \times & \text{ТН} & = & \text{УЦН} \\ + & & \times & & - \\ \text{АА} & + & \text{К} & = & \text{ТЕБ} \\ \hline \text{ТТН} & + & \text{ТУИ} & = & \text{РЦУ}; \end{array}$$

4) $$\begin{array}{ccccc} \text{ЕТ} & \times & \text{МИ} & = & \text{КТА} \\ + & & \times & & - \\ \text{ЯЯ} & + & \text{Я} & = & \text{ЕДИ} \\ \hline \text{МА} & + & \text{МРМ} & = & \text{ОАИ}. \end{array}$$

162. Расшифруйте деление:

```
1) _ББВЖ | АВ          2) _ДЫМКА | КА
    ВД   |----             ДА Р  |-----
    ---- | ВГД;            ----- | МАК;
   _ЕВ                    _ЯМ К
    ДГ                     ОК А
    ----                   -----
   _ ЕЖ                   _ А МА
     ЕЖ                     А МА
    ----                    -----

            3) _ТОКИО | ИО
                ТОН   |-----
                ----- | КИО.
               _ КИ
                 ОН
                ----
               _ ТИО
                 ТИО
                -----
```

163. В приведенных примерах восстановите отмеченные звездочками отсутствующие цифры:

```
1) _6*5*    2) + **,45   3)  × 27    4)  × 6*     5)  × *2*
    *8*4         59,27         **          ***          *7
    ----         78,*3        ---         ----        -----
    2856;        ------      + 5*        + **        + 22*8
                 182,1*;      **           ***         *6*0
                             ---          **          ------
                              8**;        -----        1*46*,
                                          ***6;

6)  × 56*    7)  × **5    8)  × **,*    9) _*8*** | ***
       *4           4*           2,*7       3*8   |-----
     ----         ----         ------       ----  | *** ;
   + **72       + 3**        + ** **       _1058
    *13*         *2**         ***           ****
    -----        -----        -------       ----
    1363*,       1****,       **,835 ,     _ ***
                                             504
                                            ----
                                              0

10) _***5* | 325     11) _******* | **        12) _****** | ***
     ***   |-----         ***     |------          ****   |-----
     ----- | 1** ;        ----    | **8** ;        ------ | *8* .
    _****                _ **                     _ ***
     *9**                  **                       ***
     -----                ----                     -----
    _ *5*                _ ***                    _ ****
      *5*                   **                      ****
     -----                -----                    -----
        0                    4                         0
```

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ВИКТОРИНА

164. На какое число нужно разделить 2, чтобы получить 4?

165. Когда делимое и частное равны между собой?

166. Запись шестизначного числа (в десятичной системе счисления) такова, что одинаковы первая и четвертая цифры, вторая и пятая, третья и шестая. Делится ли это число: а) на 7, б) на 11, в) на 13?

2 Зак. 706. Нагибин «Математическая шкатулка».

167. К данному трехзначному числу дважды приписывают точно такое же число и полученное число делят на данное. Каким будет частное?

168. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом? А двух? А четырех?

169. Существует ли простое число, являющееся четным?

170. Какой цифрой оканчивается сумма: 121^6+234^6+ $+16^6$?

171. Какой цифрой оканчивается обычная запись числа: а) 66^{66}, б) 33^{33}, в) 7^7?

172. В десятичной записи числа 73 цифры и все они единицы. Делится ли это число на 18?

173. Какую цифру нужно приписать к числу 10 справа и слева, чтобы получилась запись числа, делящегося на 72?

174. Если к числу прибавить 6, то оно разделится без остатка на 8. Чему равен остаток от деления этого числа на 8?

175. $\frac{1}{3}$ от $1\frac{1}{2}$ некоторого числа равна 50. Какое это число?

176. Как с помощью одного знака неравенства можно записать, что число a больше -2, но меньше 2?

177. Каждое из трех данных натуральных чисел разделили на сумму их и получившиеся числа сложили. Что получилось?

178. Сколько гектаров в 1 м^2?

179. Из двух селений одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста: первый со скоростью 20 км/ч, второй — 15 км/ч. Каким будет расстояние между ними за 2 ч до встречи?

180. Для устройства прямолинейной изгороди вкопали 100 столбов с расстоянием между осями соседних столбов в 3 м. Какой длины получится изгородь?

181. Если из одной стопки тетрадей переложить в другую 10 штук, то тетрадей в стопках будет поровну. На сколько в одной стопке было больше тетрадей, чем в другой?

182. За книгу заплатили 60 к. и еще $\frac{1}{3}$ стоимости ее. Сколько стоила эта книга?

183. Половина от половины числа равна половине. Какое это число?

184. На третий этаж дома ведет лестница в 36 ступеней. Сколько ступеней ведут на шестой этаж этого дома? (Счет ступеней начинается с уровня пола первого этажа, и число ступеней между каждыми двумя соседними этажами одинаково.)

185. Наполненный доверху водой сосуд имеет массу 5 кг, а заполненный наполовину — 3 кг 250 г. Сколько воды вмещает сосуд?

186. Скорость течения реки 2 км/ч. На сколько скорость плывущего по течению катера больше скорости его при движении против течения (собственная скорость катера остается неизменной)?

187. Товарный поезд имеет длину в 1 км и движется со скоростью 50 км/ч. За какое время он пройдет тоннель длиной 1 км?

ВЕСЕЛЫЕ ВОПРОСЫ

188. Мотоциклист ехал в поселок. По дороге он встретил три легковые машины и грузовик. Сколько всего машин шло в этот поселок?

189. В одной семье два отца и два сына. Сколько это человек?

190. Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу; первый из пункта a со скоростью 20 км/ч, второй из b со скоростью 15 км/ч. Который из велосипедистов будет ближе к a в момент встречи их?

191. (Шутка.) Когда нельзя сокращать сократимую обыкновенную дробь?

192. В семье 5 сыновей и у каждого есть сестра. Сколько детей в этой семье?

193. Блокнот с оберткой стоят 11 к. Сам блокнот на 10 к. дороже обертки. Сколько стоят блокнот и обертка в отдельности?

194. Часы с боем отбивают один удар за 1 с. Сколько времени потребуется часам, чтобы они отбили 12 ч?

195. Три курицы за три дня снесут три яйца. Сколько яиц снесут 6 куриц за 6 дней? А 4 курицы за 9 дней?

196. $\frac{2}{3}$ числа равняется $\frac{3}{5}$ его. Какое это число?

197. Чему равно произведение последовательных целых чисел, начинающихся числом -5 и оканчивающихся числом 5?

198. Как можно истолковать равенства: а) $19+23=18$, б) $9+8=5$, в) $12+12=0$, г) $7\cdot 3=9$?

199. (Шутка.) Одно яйцо варят 4 мин. Сколько минут нужно варить 5 яиц?

200. Четыре яблока, не разрезая их, нужно разделить между тремя приятелями так, чтобы никто из них не получил больше, чем остальные. Как это сделать?

201. Половина — треть числа. Какое это число?

202. Сколько будет трижды сорок и пять?

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

203. Запишите и вычислите разность между наибольшим двузначным числом и противоположным ему числом.

204. Вычесть из числа -2 такое число, чтобы получилось число, противоположное уменьшаемому.

205. Пусть m и n — числа либо противоположные, либо равные. В каком случае $m-n=0$? $m-n=2m$? $m-n=-2n$?

206. Могут ли выражения $2+|a|$ и $3|a|+7$ принимать отрицательные значения?

207. Указать такие значения a, при которых равенство верно: 1) $|a|=-a$; 2) $|a|=a$.

208. Указать такие значения k и n, при которых верны: 1) неравенство $k<-k$; 2) равенство $n=-n$.

209. Указать такие значения m, при которых верны: а) неравенство $m<|m|$; б) равенство $m=|-m|$.

210. При каких значениях получаются истинные высказывания: 1) $-c=|-c|$; 2) $-c<|-c|$; 3) $-c<|c|$?

211. Пусть числа a и b либо оба положительны, либо оба отрицательны, при этом $a>b$. При каких значениях a и b верны неравенства:

$$1)\ |a|>|b|;\ 2)\ |a|<|b|?$$

212. Может ли сумма $a+b$ быть меньше слагаемого a? Привести примеры.

213. При каких значениях a верны равенства: 1) $|a|+a=0$; 2) $a+|a|=2a$?

214. Если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то верно ли утверждение, что всегда $a+b\neq 0$?

215. Считая выполнимым переместительный закон умножения (сложения) для натуральных чисел, докажите его выполнимость для всех целых, а также для всех рациональных чисел.

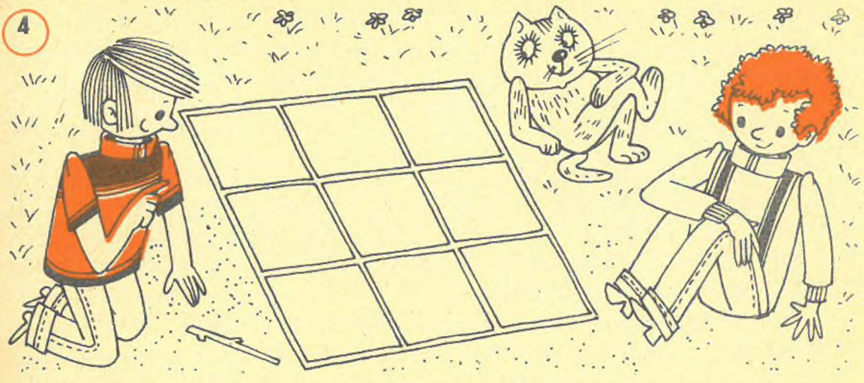
216. Вычислить сумму: 1) всех целых чисел от наибольшего целого отрицательного числа до наименьшего натурального числа, вычисление объяснить; 2) трех последовательных целых отрицательных чисел, начиная с числа -5; 3) наибольшего и наименьшего двузначных отрицательных чисел и наибольшего двузначного натурального числа.

217. Записать и вычислить разность: 1) между наименьшим натуральным числом и наибольшим целым отрицательным числом; 2) между наименьшим целым двузначным отрицательным числом и наименьшим однозначным целым отрицательным числом.

218. Указать такие значения b, при которых разность $a-b$ больше суммы $a+b$.

219. Доказать, что $a-b=a+(-b)$ при любых a и b.

4



220. При каких значениях множителей произведение ab обращается в нуль?

221. Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. Верно ли утверждать, что $ab \neq 0$?

222. Пусть $ab > 0$ ($ab < 0$). Как изменится это произведение, если a заменить противоположным ему числом? b заменить на $-b$, оба числа a и b заменить противоположными?

223. Верно ли утверждать, что при любых рациональных значениях k выполняется неравенство $2k > k$? Рассмотреть случаи: 1) $k < 0$; 2) $k = 0$; 3) $k > 0$.

224. Верно ли утверждение: «Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$»? Привести примеры, подтверждающие ответ.

225. $mn < 0$ ($mn > 0$). Что следует сказать о знаках m и n?

226. Записать в клетках квадрата (рис. 4) числа -1, $+2$, -3, $+4$, -5, $+6$, -7, $+8$, -9 так, чтобы их произведения по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям были отрицательны.

227. Записать в клетках квадрата (рис. 4) числа -1, $+2$, -3, -4, $+5$, -6, -7, $+8$, -9 так, чтобы по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям произведения их были положительны.

228. $\frac{a}{b} > 0$ ($\frac{b}{a} < 0$). Как изменится частное, если a заменить на $-a$, если b заменить на $-b$? Одновременно заменить a на $-a$ и b на $-b$?

229. Указать такие значения a и b, при которых выполняются следующие соотношения:

1) $\frac{a}{b} = 0$; 2) $\frac{a}{b} = 1$; 3) $\frac{a}{b} = -1$; 4) $\frac{a}{b} > 1$; 5) $\frac{a}{b} < 1$.

230. Числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 записать в клетки квадрата (рис. 4) так, чтобы их произведения по всем вертикалям, горизонталям и диагоналям были равны.

Указание. Представить эти числа в виде степени числа 2.

231. Какое число равно обратному ему?

232. Сумма каких двух слагаемых равна их разности?

233. Пусть $p > q$. Найти наименьшее и наибольшее из чисел $\frac{p+q}{2}$ и q.

234. Применяя законы арифметических действий, доказать, что: 1) сумма и разность двух четных чисел являются числом четным; 2) сумма и разность двух нечетных чисел является числом четным; 3) сумма и разность четного и нечетного чисел являются числом нечетным.

235. Выполняется ли переместительный закон для вычитания? Для возведения в степень? Ответ пояснить примерами.

236. Докажите, что среди рациональных чисел нет таких, квадрат которого равен: 1) 3; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 101.

237. Докажите, что среди рациональных чисел не существует такого, куб которого равен: 1) 3; 2) 9.

238. Какие из данных выражений имеют рациональные числовые значения: 1) $\sqrt{6,25}$; 2) $\sqrt{111}$; 3) $\sqrt{0,49}$; 4) $\sqrt{0,049}$?

В МИРЕ ЧИСЕЛ (СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ)

Любое натуральное число в десятичной системе счисления представляется в виде суммы $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + ... + a_1 10 + a_0$, где $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ — числа 0,1, 2, ..., 8, 9, означающие, что число N состоит из a_0 единиц, a_1 десятков, a_2 сотен и т. д. Запись 27 354 выражает, например, что в составе числа имеются 4 единицы, 5 десятков, 3 сотни, 7 тысяч и 2 десятка тысяч ($27\,354 = 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$). В общем случае для обозначения таких сумм часто пользуются записью: $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$, где $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ — цифры в записи числа.

Почему за основание десятичной системы счисления принимается число 10? Никаких особых математических преимуществ у числа 10 по сравнению с другими нет. Использование его, как основания системы счисления исторически объясняется только тем, что первым счетным аппаратом человека были десять пальцев рук. Счет по пальцам рук, которым пользовались наши предки, положил начало системе счисления.

В прошлом люди пользовались и другими системами счисления. Применялись, например, двенадцатеричная, шестидесятеричная, пятеричная, двадцатеричная системы с основаниями 12, 60, 5, 20. Следы этих систем сохранились в языках, мерах, денежных единицах разных стран и народов.

В связи с развитием ЭВМ широкое применение нашли двоичная, восьмеричная, троичная, двоично-восьмеричная системы. Для современных вычислительных машин эти системы оказались более удобными, чем десятичная.

Как же переводить числа из одной системы счисления в другую? Пусть, например, нужно число 1421 из десятичной системы счисления перевести в восьмеричную*. Можно поступить так. Разделим данное число на 8; получим в частном 177 и в остатке 5. Частное 177 снова разделим на 8, получим новое частное 22 и остаток 1. Это частное еще раз делим на 8, получаем частное 2 и остаток 6. Деление продолжаем до тех пор, пока в частном не получим число меньше 8. Записать этот процесс деления можно так:

$$
\begin{array}{rrrr}
1421 & \big|\,\underline{\;8\;} & & \\
\underline{5} & 177 & \big|\,\underline{\;8\;} & \\
 & \underline{1} & 22 & \big|\,\underline{\;8\;} \\
 & & \underline{6} & 2
\end{array}
$$

Имеем последовательно: $22 = 2 \cdot 8 + 6$, $177 = (2 \cdot 8 + 6) \cdot 8 + 1$ и $1421 = ((2 \cdot 8 + 6) \cdot 8 + 1) \cdot 8 + 5$, т. е. $1421 = 2 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 5$. Следовательно, $1421_{10} = 2615_8$. Как видим, чтобы записать данное число 1421_{10} в системе счисления с основанием 8, достаточно выписать друг за другом последнее частное 2 и остатки 6, 1, 5.

Пусть, наоборот, нужно число из недесятичной системы перевести в десятичную. Как это сделать, покажем на примере. Возьмем число 23401_5. Его можно записать в виде суммы и произвести затем необходимые вычисления. $23401_5 = 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 = 1726_{10}$.

Особенно проста система счисления с основанием 2. В ней используются только 0 и 1. На первом справа месте записывается число единиц — 0 или 1; на втором — число двоек — 0 или 1; на третьем — число четверок — 0 или 1; на четвертом — число восьмерок и т. д. Вот несколько записей чисел в этой системе счисления: $101110_2 = 46_{10}$, $101010011_2 = 393_{10}$.

Мы уже знаем, как от десятичной записи числа перейти к записи при другом основании и обратно. Особо рассмотрим еще переход от записи числа при основании 2 к записи при основании 8. Он очень прост и используется при записи чисел, с которыми оперирует ЭВМ. В основе этого перехода лежит представление чисел от 0 до 7 в двоичной системе счисления. Составим табличку:

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

В верхней строке этой таблички записаны цифры, используемые в системе счисления с основанием 8, а под ними — записи соответствующих чисел в двоичной системе счисления, так называемые триады.

* Для различения чисел между собой в зависимости от применяемой системы счисления с основанием p приняты записи вида: 1421_{10} — в десятичной системе, $10\,100_2$ — в двоичной системе и т. п.

П. С. ЛАПЛАС
(1749—1827)

«Мысль выражать числа десятью знаками... настолько простая, что... трудно понять, насколько она удивительна».

Как пользоваться этой табличкой, покажем на нескольких примерах.

1) Пусть имеем число 101010011_2. Разобьем его справа налево на грани по 3 цифры в каждой. Начальная (старшая) грань может содержать три, две или одну цифру. Имеем: 101010011. Но каждая из этих граней в системе с основанием 8 дает одну из цифр 0, 1, 2, ..., 6, 7. Поэтому в нашем случае получаем число 523_8.

2) Если имеется число, записанное в восьмеричной системе, то для перевода его в двойную достаточно вместо каждой цифры данного числа записать соответствующую ей триаду. Так число 73333653_8 равно 111011011011110101011_2.

3) Мы видим, что переход от десятичной системы к двоичной лучше осуществлять с помощью восьмеричной системы. Пусть, например, нужно число 172_{10} представить в двоичной системе. Получаем:

$$\begin{array}{r|l} 172 & 8 \\ \hline 4 & 21 \;\big|\; 8 \\ & \;5 \quad\; 2 \end{array}$$

Следовательно, $172_{10} = 254_8 = 010101100_2 = 10101100_2$. Переводить десятичное число в восьмеричное легче, а переход от восьмеричной системы к двоичной очень прост.

Как выполнять действия в системе счисления, отличной от десятичной? Можно, конечно, переводить данные числа в десятичную систему и выполнять указанные над ними действия. Но можно и не переходить к привычной для нас десятичной системе, а выполнять действия в заданной системе по аналогии с выполнением их в десятичной. «Жить» в недесятичной системе счисления для нас непривычно, но вполне возможно. Нужно только все время помнить, каково основание системы.

Вот несколько примеров непосредственного выполнения действий в недесятичных системах счисления. Как они производятся, вы легко разберетесь сами.

1) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 1421_8 \\ 20476_8 \end{array} \\ \hline 22117_8 \end{array}$; 2) $\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 1100101_2 \\ 110111_2 \end{array} \\ \hline 101110_2 \end{array}$; 3) $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 121_3 \\ 12_3 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 1012 \\ 121 \end{array} \\ \hline 2222_3 \end{array}$; 4) $\begin{array}{r|l} -\,120101_3 & 102_3 \\ \cline{2-2} 102 & 1101_3 \\ \cline{1-1} -\,111 & \\ 102 & \\ \cline{1-1} -\,201 & \\ 102 & \\ \cline{1-1} 22_3 & \end{array}$.

Особенно просты действия с двоичными числами, стоит только запомнить простые таблицы сложения и умножения.

Вот они:

Как пользоваться этими таблицами, показывают примеры:

1) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 110010111 \\ 1010011 \end{array} \\ \hline 111101010 \end{array}$; 2) $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 101100101 \\ 1011 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 101100101 \\ 101100101 \\ 101100101 \end{array} \\ \hline 1111010101111 \end{array}$.

Более подробно о системах счисления можно прочитать в брошюре С. В. Фомина*.

239. В какой системе счисления $2 \cdot 2 = 10$?

240. Один шестиклассник о себе написал так: «Пальцев у меня 24, на каждой руке 5, а на ногах 12». Как же так могло быть?

241. Запишите: 1) число 2456_{10} по пятеричной системе счисления; 2) 321_{10} по троичной; 3) 64_{10} по двоичной.

242. Запишите в десятичной системе счисления следующие числа: 1) 100101_2; 2) 120012_3; 3) 403200_5; 4) 5042_8.

243. Во сколько раз увеличится число 325_6, если: 1) приписать справа один нуль; 2) приписать справа три нуля?

244. Во сколько раз уменьшится число 212000_3, если: 1) отбросить справа один нуль; 2) отбросить три нуля?

245. В какой системе счисления: 1) 23_{10} запишется как 212; 2) 33_{10} как 53; 3) 42_{10} как 52?

246. Какое из чисел больше: 1) 3_{10} или 3_8; 2) 14_{10} или 14_8; 3) 111_2 или 111_8; 4) $0{,}11_2$ или $0{,}11_{10}$; 5) $0{,}21_{10}$ или $0{,}21_8$; 6) $0{,}2_{10}$ или $0{,}1463_8$; 7) $0{,}2_8$ или $0{,}1463_8$; 8) $\frac{1}{5_{10}}$ или $\frac{1}{5_8}$; 9) $\frac{1}{8_{10}}$ или $\frac{1}{10_8}$?

* См.: Фомин С. В. Системы счисления. М., 1975.

247. Выполните указанные действия: 1) $1011001_2 + 1000111_2$; 2) $11011_2 \cdot 1101_2$; 3) $322_5 \cdot 14_5$; 4) $1111010101111_2 : 1011_2$; 5) $3240_5 + 4023_5$; 6) $1421_8 + 20476_8$; 7) $23265_8 - 4762_8$; 8) $121_3 \cdot 12_3$; 9) $120101_3 : 102_3$.

248. В какой системе счисления будет: 1) $4 \cdot 4 = 31$; 2) $3 \cdot 3 = 10$?

249. Установите, в какой системе счисления выполнялось каждое из следующих действий: 1) $23 + 14 = 42$; 2) $71 - 36 = 33$; 3) $14 \cdot 2 = 30$; 4) $55 : 4 = 13$.

250. Если $4 \cdot 4 = 20$, то чему равно произведение $5 \cdot 5$ (в той же системе счисления)?

251. Число, записанное в десятичной системе счисления, оканчивается цифрой 5. Будет ли это число кратно 5, если его записать в системе счисления с основанием 3?

252. Хорошо известны признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10 в десятичной системе счисления. Будут ли верны эти признаки в иных системах счисления, например при основании 3, 5?

253. Выполните действия: 1) $1000000_2 : 1000_2$; 2) $11_2 : 100_2$; 3) $11_2 : 101_2$; 4) $12_3 : 100_3$; 5) $10_3 : 11_3$.

254. Запишите дроби $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ по аналогии с десятичными дробями в виде двоичных дробей.

255. Дроби $\frac{4}{27}$ и $\frac{4}{5}$ запишите в виде троичных дробей.

256. 1) Запишите текущий год в двоичной системе счисления; 2) запишите в троичной системе счисления год своего рождения.

257. Составьте таблицы сложения и умножения однозначных чисел в системе счисления с основаниями: 1) 3; 2) 6.

258. Расшифруйте высказывание: «Мне 1111 лет, и я учусь в III классе».

259. Имеется набор из 60 цифр 0 и 1, разбитых на 30 групп так, что в каждую группу входят 0 и 1. Из каждой такой группы берется по одной цифре и составляется число. Очевидно, что мы так можем составить в двоичной системе любое число, имеющее не более 30 двоичных знаков, а всего таких чисел будет 2^{30}. Если бы имелся набор из 60 цифр 0, 1, 2, разбитых на 20 групп так, что в каждую группу входят 0, 1 и 2, то в троичной системе счисления можно было бы составить 3^{20} чисел. Аналогично, имея набор из 60 цифр 0, 1, 2, 3, разбитых на 15 одинаковых групп, можно составить в четверичной системе 4^{15} чисел, в десятичной — соответственно 10^6. Какая из этих систем наиболее экономична (в какой из них можно записать больше чисел)?

260. В кабинете физики имеется набор гирь: 100 г (одна

штука), 50 г (1), 20 г (2), 10 г (1), 5 г (1), 2 г (2), 1 г (1). 1) Поясните, почему систему этих гирь можно считать системой счисления. 2) Укажите цифры и ключевые числа (базис) этой системы счисления. 3) Запишите в виде разложения по заданному базису 133 г, 209 г, 86 г. 4) Какие массы задаются числами 1121121, 10101, 1101100 этой системы?

261. Имеется набор монет достоинством 50 к. (2 монеты), 20 к. (2), 15 к. (3), 10 к. (4), 5 к. (3), 3 к. (2), 2 к. (4) и 1 к. (2). 1) Укажите цифры и базис этой системы. 2) В книжном магазине имеются книги, цена которых 2 р. 06 к., 1 р. 08 к., 67 к., 7 к. Запишите эти цены в заданном базисе (сначала используются монеты большего достоинства). 3) Сколько рублей и копеек соответствуют числам 333101, 40242, 10120110?

262. В системе летосчисления нашей эры базисом являются секунды, минуты, часы, сутки, месяцы, годы, века. 1) Укажите цифры каждого из 7 разрядов. 2) Запишите в таблицу этой системы счисления начало первого урока текущего учебного года.

263. В системе счисления «Час, сутки, неделя» запишите в таблице время, оставшееся: 1) до весенних каникул; 2) до нового года.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ (АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ)

264. С помощью четырех цифр 2 и знаков действий составьте такие числовые выражения, значения которых были бы равны: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

265. В записи 88888888 поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения так, чтобы получилась в сумме 1000.

266. Увеличится или уменьшится правильная дробь (неправильная), если к числителю и знаменателю ее прибавить одно и то же натуральное число?

267. Сравните дроби $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$, $\frac{232323}{999999}$.

268. Запишите в порядке возрастания дроби

$$\frac{3001}{5001},\ \frac{3}{5},\ \frac{301}{501},\ \frac{31}{51}.$$

269. По столбу высотой 10 м взбирается улитка. Днем она поднимается на 5 м, а ночью опускается на 4 м. Через сколько дней улитка достигнет вершины столба?

270. Имеются 9 кг крупы и гири в 50 и 200 г. Как отмерить в три приема на чашечных весах 2 кг крупы?

271. На торговой базе имеются 7 одинаковых бочек, заполненных растительным маслом, 7 таких же бочек, заполненных наполовину, и 7 таких же пустых бочек. Все эти бочки нужно развести по трем магазинам так, чтобы они получили масла и бочек поровну. Как это сделать?

272. В одной области 10 городов и каждые два города сое-

динены шоссейной дорогой. Сколько всего шоссейных дорог, соединяющих города этой области?

273. Делится ли число $7^{77}+1$ на 5?

274. Какой вид имеют все числа, при делении которых на 7 получаются частные, равные остаткам?

275. Может ли сумма $1+2+3+\ldots+(k-1)+k$ при каком-нибудь натуральном значении k оканчиваться цифрой 7?

276. При делении некоторого натурального числа на 2 получается в остатке 1, а при делении на 3 — в остатке 2. Какой будет остаток при делении этого числа на 6?

277. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел меньше 13, то произведение их не больше 36.

278. Докажите, что если сумма четырех натуральных чисел — нечетное число, то произведение их — четное число.

279. Докажите, что натуральное число, в десятичной записи которого имеются 300 единиц, а все остальные цифры — нули, не может быть точным квадратом.

280. Вычислите сумму цифр всех чисел от 1 до 100 (включительно).

281. Сколько нулей в конце записи числа, выражающего произведение всех натуральных чисел, от 10 до 20?

282. Сколько нулей в десятичной записи произведения $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot98\cdot99\cdot100$?

283. Какое из чисел: 222^2, 22^{22}, 2^{222}, 22^{2^2}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$ наибольшее?

284. Запишите с помощью трех девяток наибольшее число.

285. Запись числа A состоит из 1984 цифры, и оно делится на 9. B — сумма цифр числа A, а C — сумма цифр числа B. Найдите число C.

286. Какие четыре гири нужно иметь, чтобы с их помощью можно было на чашечных весах отвесить любое целое число килограммов, не превосходящее 40?

287. При сложении нескольких чисел ученик из-за небрежных записей допустил следующие ошибки: цифру единиц 3 он принял за 9, цифру сотен 1 он принял за 7, наконец, цифру тысяч 5 он принял за 6. У ученика получилось 63587. Помогите ученику найти верную сумму.

288. Если от задуманного трехзначного числа отнять 7, то получившееся число разделится на 7, если отнять от задуманного числа 8, то результат разделится на 8, а если отнять 9, то результат разделится на 9. Какое число было задумано?

289. Число 45 надо представить в виде четырех слагаемых так, что если к первому слагаемому прибавить 2, от второго отнять 2, третье умножить на 2, а четвертое разделить на 2, то все результаты будут равны. Найдите эти слагаемые.

290. Напишите наименьшее трехзначное число, кратное 3, так, чтобы первая цифра его была 8 и все цифры были бы различны.

291. Напишите наименьшее пятизначное число, кратное 9, так, чтобы первая цифра его была 6 и все цифры были бы различны.

292. Если число 12345679 умножить на 9, то получится число 111111111 (проверьте). На какое число нужно умножить 12345679, чтобы получилось число, записанное при помощи: 1) одних пятерок; 2) одних девяток?

293. 1) Какая из двух дробей: $\frac{22}{35}$ и $\frac{110}{177}$ — больше? 2) Какая из двух дробей: $\frac{1983}{1984}$ и $\frac{1984}{1985}$ — больше? Как проще сравнить эти дроби?

294. Дана дробь $\frac{11}{41}$. Какое число нужно прибавить к обоим членам этой дроби, чтобы она обратилась в $\frac{3}{8}$?

295. Дана дробь $\frac{29}{64}$. Какое число надо отнять от обоих членов ее, чтобы получить дробь $\frac{2}{9}$?

296. Дана дробь $\frac{37}{63}$. Какое число нужно вычесть из ее числителя и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получилась дробь $\frac{3}{17}$?

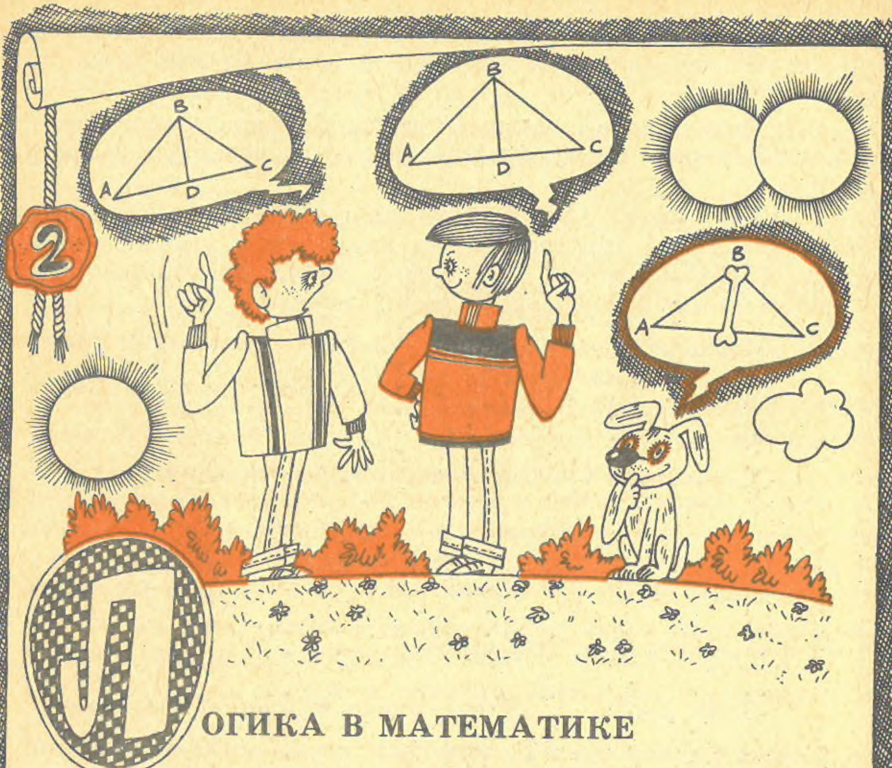
297. Чтобы пронумеровать страницы некоторой книги, понадобилось 1164 цифры. Сколько в этой книге страниц?

298. Сколько цифр нужно употребить для нумерации книги, в которой 634 страницы?

299. Сколько всевозможных делителей имеет число: 1) $2^{10} \cdot 3^2$; 2) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$?

300. Все натуральные числа, начиная с 1, записаны в порядке их возрастания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11... Какая цифра в этой записи стоит на сотом месте?

301. Брату и сестре понравилась в киоске почтовая марка, но, чтобы купить ее, брату не хватило 20 к., а сестре — 14 к. Когда же они сложили вместе имеющиеся у них деньги, то оказалось, что им не хватает еще 4 к. Сколько стоила марка?



ЛОГИКА В МАТЕМАТИКЕ

> Математика принадлежит к числу наук, имеющих громадное значение для выработки умения логически мыслить, делать обобщения.
>
> *Н. К. Крупская*

УЧИТЕСЬ ПРАВИЛЬНО РАССУЖДАТЬ

«Однажды, в самом начале учебного года, мне пришлось услышать разговор двух девочек. Старшая из них перешла в шестой класс, младшая — в пятый. Девочки делились своими впечатлениями об уроках, учителях, подругах, о новых предметах. Шестиклассницу очень удивили уроки геометрии: «Вот чудеса,— говорила она. — пришла учительница в класс, нарисовала на доске два равных треугольника, а потом целый урок доказывала нам, что они равны. Никак не пойму: зачем это

Н. К. КРУПСКАЯ
(1869—1939)

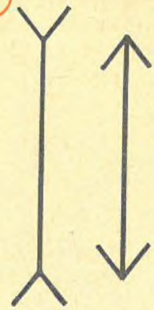
«Когда ребята поймут связь математики с другими отраслями знаний, математика оживет, будет увлекать, из трудного предмета превратится в отрасль знания».

нужно?». «А как же ты будешь отвечать?» — спросила младшая девочка. «Выучу по учебнику... вот только очень трудно запомнить, где какую букву нужно поставить...» Таким рассказом начинается интересная книжка А. И. Фетисова «О доказательстве в геометрии» (1954).

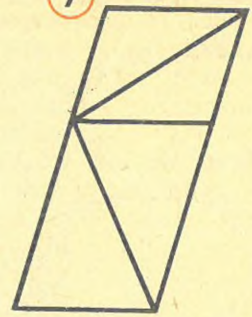
Мне тоже много раз приходилось слышать от шестиклассников, что они не понимают, зачем нужно рассуждениями доказывать геометрические теоремы. «Что вертикальные углы равны, — говорили они, — это и так видно». «Что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны — это пока-

5

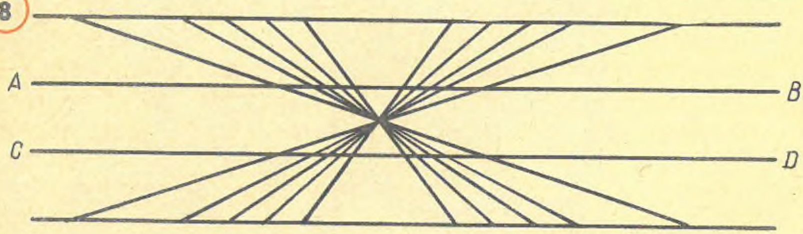
6



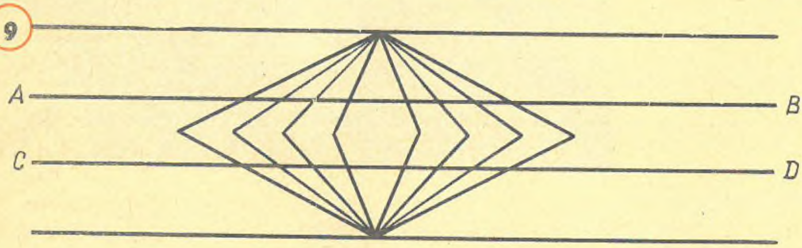
7



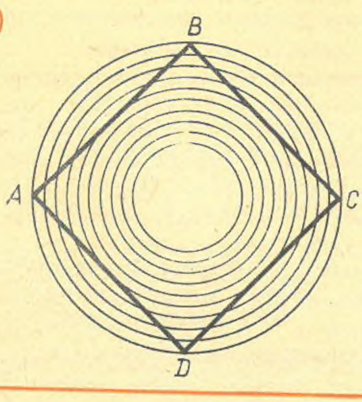
8



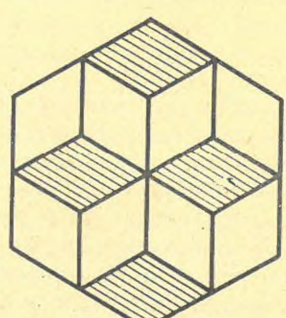
9



10



11



зывает чертеж. Чего же тут еще рассуждать?» — удивлялись они. Нельзя было оставлять такие вопросы без ответа, вот и приходилось беседовать с учащимися о математических доказательствах. Об одной из таких бесед я и расскажу.

Шестиклассник Боря сказал мне, что геометрические теоремы надо доказывать чертежами. «Посмотришь на чертеж, и сразу видно, что теорема верна. Глаз не обманет», — говорил он. У меня под руками на этот раз оказалось несколько интересных рисунков, и я показал их Боре. «Сравни длины вот этих двух отрезков», — попросил я (рис. 5). Боря посмотрел на чертеж и, усмехнувшись, сказал: «Конечно, вертикальный длиннее». «А сейчас?» — и я показал второй чертеж (рис. 6). «Левый длиннее», — заявил Боря. «А вот два параллелограмма (рис. 7), и в каждом из них проведена диагональ. Сравни их». И на этот раз Боря уверенно заявил, что нижняя диагональ длиннее. Тогда я предложил Боре линейкой измерить все сравниваемые отрезки. Он охотно взялся за это, ничуть не сомневаясь, что измерения только подтвердят его ответы. Но измерения показали, что на каждом из этих чертежей длины сравниваемых отрезков равны. Боря не поверил этому и снова начал измерять. Новые измерения привели его к тому же выводу. Лицо Бори выражало растерянность. Он моргал глазами, силясь понять, в чем же дело.

Дальше я показал Боре еще три чертежа (рис. 8, 9, 10) и попросил установить — прямые или кривые линии AB и CD на этих чертежах? Ответ был таким: «Конечно, кривые». И снова Боря растерялся, когда приложил к этим линиям линейку и обнаружил, что все линии прямые.

Наконец я показал Боре еще один рисунок (рис. 11) и спросил, что изображено на нем. Он внимательно посмотрел и сказал: «Тут изображены три кубика: один вверху, а два внизу». «Посмотри снова, — попросил я, — так как мне кажется, что вверху два кубика, а под ними один». Боря снова посмотрел. «А ведь верно, два вверху и один внизу. Почему же мне вначале показалось, что наоборот? Постойте, постойте, опять два внизу, а один вверху». Боря удивленно потер глаза. «Как же так? Снова два сверху, а один снизу. Чудно».

После всех этих демонстраций мне осталось спросить Борю: «Можно ли доказывать чертежами теоремы? Не могут ли наши глаза обманывать нас?» И Боря честно признал, что рассмотрение чертежей может привести к ошибочным заключениям, потом немного подумал и, оживившись, сказал: «Глазам доверять нельзя, а надо измерять». Пришлось мне продолжить беседу. Я сказал Боре, что всякие измерения неточны, да к тому же выполнить их часто бывает трудно. Может, например, не оказаться под руками нужных инструментов. Но главное — в другом. Измерить можно один или несколько отрезков, один или несколько углов и т. д. Но все фигуры рассматриваемого вида измерить невозможно. И то, что верно для каких-нибудь двух измеренных треугольников, может оказаться неверным для двух других треугольников. Как же быть? Вывод сделал сам Боря. «Делать нечего, придется учиться рассуждать, чтобы доказывать теоремы». Это был хороший вывод. Действительно, надо учиться правильно, логически рассуждать.

В заключение беседы я рассказал Боре то, что недавно слышал и наблюдал на одном уроке геометрии в 6-м классе. На этом уроке перед изучением теоремы о свойствах равнобедренного треугольника была проведена опытная работа. Каждый ученик в своей тетради начертил равнобедренный треугольник и с помощью транспортира измерил углы при основании этого треугольника. После этого был сделан вывод, что, наверно, углы при основании равнобедренного треугольника равны. Сформулирована была теорема, затем учитель сказал: «Мы проверили теорему об углах при основании равнобедренного треугольника для 35 таких треугольников (на уроке было 35 учеников), и для них эта теорема оказалась верной. Правильно ли отсюда сделать вывод, что она будет верна для любого равнобедренного треугольника? А может быть, для тридцать шестого треугольника, который мы начертим, она будет неверной? Как же быть? На помощь приходят рассуждения, и за несколько минут мы сделаем то, что невозможно сделать с помощью опытной проверки, если бы даже этой проверкой занимались все ученики всех школ. При помощи логических рассуждений мы докажем эту теорему для всевозможных равнобедренных треугольников. Вот какую важную роль играют в геометрии рассуждения». Дальше на уроке было проведено доказательство этой теоремы.

Я объяснил Боре, что доказательство любой теоремы — это цепочка логических умозаключений, сводящих доказываемую теорему к ранее доказанным теоремам и введенным аксиомам и определениям. Но ранее доказанные теоремы сводятся к теоремам, которые были доказаны еще раньше. В конечном счете, все теоремы опираются на принятые аксиомы.

В доказательствах теорем постоянно используются математические понятия. Большинство математических понятий определяются. При определении нового понятия употребляются другие понятия, которые должны быть уже известными. Но такое сведение одних понятий к другим не может быть бесконечным. Должны быть исходные понятия, первичные, несводимые к другим, неопределяемые. Таковы, например, понятия: множества, точки, числа, расстояния и другие. Их можно пояснить, описать, привести конкретные примеры, но не определить. Все это учащимся нужно хорошо усвоить, и тогда многие трудности изучения математики будут преодолены.

Боря слушал меня очень внимательно. И когда мы расстались, он сказал, что понял, зачем надо доказывать теоремы так, как это делается на уроках.

Есть такая наука, она называется логикой, которая учит, как нужно рассуждать, чтобы наше мышление было определенным, связным, последовательным, доказательным и непротиворечивым. Как человек, не знающий правил арифметики и грамматики, не может правильно считать и грамотно писать, так и человек, не знающий правил логики, не может без ошибок рассуждать и действовать. Значит, советский человек, чтобы принести больше пользы своей великой Родине, делу построения коммунизма, должен владеть логикой.

Человеку, занимающемуся математикой, очень часто приходится определять понятия, выяснять связи между ними, рассматривать, на какие группы (виды) могут быть подразделены фигуры, числа, уравнения функции и т. д. Но особенно часто в математике приходится путем рассуждений выводить разнообразные формулы, правила и доказывать теоремы. Не случайно находились такие математики, которые думали, что математика — это наука «о производстве необходимых умозаключений». Такой взгляд на математику односторонен, но верно то, что без логики не может быть математики. А это значит, что для успешного изучения математики надо настойчиво учиться правильно рассуждать. Это значит также, что само изучение математики очень полезно для овладения правилами и законами мышления. Не без оснований называют иногда математику «оселком для ума». Не случайно М. И. Калинин говорил ученикам средних школ Ленинского района г. Москвы, что «...математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. Недаром говорят, что математика — это гимнастика ума. Я не сомневаюсь, что голова у вас ломится от мыслей, но эти мысли надо упорядочить, дисциплинировать, направить, если можно так выразиться, в русло полезной работы. Вот математика и поможет вам справиться с этой задачей».

Жизнь, особенно техника, а также очень многие науки, ставят перед математикой все новые и новые задачи. Математикам приходится разрабатывать вопросы математической теории и создавать методы, обеспечивающие решения возникающих в различных науках и практике задач. Как же поступают математики? Решение всякой задачи по математике — это прежде всего цепь рассуждений. Вычисления, преобразования, построения, которыми так часто приходится пользоваться для решения задач, невозможны без логических рассуждений: они направляются рассуждениями. Значит, в математике невозможно обойтись без логики.

Приведем несколько примеров. В 1781 г. была открыта планета Уран. Наблюдения за движением этой планеты в конце XVIII — начале XIX в. показали, что оно несколько отличается от математически предсказанного движения. Объяснить это отличие можно лишь влиянием на Уран новой, неизвестной планеты, находящейся еще дальше от Солнца. И вот фран-

М. И. КАЛИНИН
(1875—1946)

«Все школьники должны помнить, что только тот человек будет иметь какое-нибудь значение в общественной и государственной жизни, на любом полезном поприще, кто умеет работать систематично, со знанием дела».

цузский ученый Леверье (1811—1877), исходя из отклонений в движении Урана, логически рассуждая и выполнив довольно сложные вычисления, указал положение этой планеты на небе. И действительно, в указанном Леверье участке неба 23 сентября 1846 г. астроном Галле нашел новую планету, названную потом Нептуном. Это открытие является одним из выдающихся достижений человеческого мышления. Так же была открыта и девятая, следующая планета, названная Плутоном.

Математика помогла также открытию многих малых планет, например Цереры. Цереру впервые наблюдал астроном Пиацци, но из-за перерыва в наблюдениях потерял ее. На помощь пришел знаменитый математик К. Ф. Гаусс. Располагая некоторыми данными о новой планете, полученными Пиацци, он вычислил ее орбиту. И действительно, по указаниям, данным Гауссом, Церера была вновь найдена.

Вот еще один пример, иллюстрирующий значение логики в математике. В глубокой древности люди пытались опытным путем найти отношение длины окружности к ее диаметру, т. е. пытались найти число, показывающее, во сколько раз длина окружности больше длины ее диаметра. Этим числом, обозначаемым буквой π (пи)*, приходится пользоваться при вычислении по известной длине диаметра длины окружности и площади круга, а также для решения многих других важных задач. Значит, надо было с необходимой точностью вычислить значение π. Опытное вычисление могло дать лишь грубо приближенный результат. На ранних ступенях человеческой культуры пользовались этими неточными значениями π. В Древнем Египте, например, свыше 3000 лет назад считали число π равным 3. В III в. до н. э. один из величайших математиков Древней Греции, талантливый изобретатель, верный сын своей родины, погибший от врагов ее, Архимед без измерений, одними лишь рассуждениями и вычислениями, нашел для числа π довольно точное значение: $3\frac{1}{7}$ (архимедово число). Позднее другие математики, воспользовавшись открытием Архимеда, вычислили π с еще большей точностью. Так, в XVI в. немецкий математик Лудольф, затратив очень много времени, вычислил 35 десятичных знаков этого числа. Лудольфово значение π равно: 3,14159265358979323846264338327950288. Вычисления более точных значений π после Лудольфа, основанные уже на иных соображениях, не прекращались. В 1873 г. математик Шенкс вычислил 527 десятичных знаков этого числа. Шенкс, правда, вычислил всего 707 десятичных знаков, но, начиная с 528-го, его знаки оказались ошибочными. Такое приближенное значение π, какое было найдено Шенксом, наверное, не имеет практической ценности. И все же вычисление новых знаков числа π продолжалось. В 1946—1947 гг. в Англии и США с помощью ЭВМ вычислили 808 десятичных знаков этого числа, в 1949 г. — 2035 знаков, а затем 3089 знаков. В настоящее время известно свыше 10 000 знаков числа π, и вычисление все новых знаков приносит некоторую практическую пользу: так проверяют вычислительные возможности современных ЭВМ, программного обеспечения к ним. Мы видим, что логические рассуждения, позволившие развить геометрию и другие части математики, дают возможность вычислить число π и многие другие часто используемые числа (константы) с любой степенью точности, без каких-либо измерений.

Все сказанное заставляет сделать вывод о необходимости настойчивого овладения умением логически рассуждать. Каждому школьнику надо упорно учиться правильно мыслить.

Может быть, это следует делать лишь в старших классах средней школы? Учиться логически рассуждать нужно много и постоянно во всех классах школы.

---

* Это обозначение впервые применил в 1706 г. английский математик У. Джонс, а общепринятым оно стало с 1736 г., когда его стал систематически употреблять Л. Эйлер.

«НЕ», «И», «ИЛИ»

Чтобы научиться правильно рассуждать, надо изучить правильные способы, методы рассуждений. Анализом методов рассуждений занимается наука логика, а исследованием и изучением математических рассуждений — математическая логика. В математической логике для исследований применяется математический аппарат.

Чтобы правильно рассуждать, надо научиться из простых высказываний правильно составлять сложные высказывания, или, как говорится в математической логике, выполнять операции над высказываниями. При этом необходимо знать, вытекает ли истинность сложных высказываний из истинности составляющих их более простых предложений.

Простейшие операции над высказываниями.

Отрицание. Обозначается, как и в обыденной речи, частицей «не» или словом «неверно». Отрицанием высказывания, например: «Прямая a параллельна прямой b ($a \parallel b$)» является предложение «Прямая a не параллельна прямой b» или «Неверно, что прямая a параллельна прямой b». В символической форме это отрицание записывается так: $\overline{a \parallel b}$ или $\urcorner\,(a \parallel b)$. Ясно, что отрицание $\urcorner\, A$ истинно тогда и только тогда, когда ложно A, и наоборот.

Конъюнкция. Два высказывания могут быть соединены союзом «и». Из высказываний «Число 5 простое» (обозначим его A), «Число 5 нечетное» (обозначим его B) можно составить сложное высказывание A и B (обозначается $A \wedge B$): «Число 5 простое и нечетное». Такое сложное высказывание $A \wedge B$ называется конъюнкцией высказываний A и B. Если каждое из высказываний A и B истинно, то истинно и высказывание $A \wedge B$. Если хотя бы одно из высказываний A, B является ложным, то ложным будет и высказывание $A \wedge B$.

Дизъюнкция. Два высказывания могут образовать сложное высказывание, будучи соединены союзом «или», употребляемым в неразделительном смысле. A или B означает истинность хотя бы одного из высказываний A и B. Такое сложное высказывание называется дизъюнкцией высказываний A и B. Обозначается $A \vee B$. Например, дизъюнкция $A \vee B$ высказываний A («Число 5 простое») и B («Число 5 четное») — высказывание «Число 5 простое или четное». В этом случае A истинное, B ложное, $A \vee B$ — истинное высказывание. Дизъюнкция истинных высказываний A и $\urcorner\, B$ ($A \vee (\urcorner\, B)$).«Число 5 простое или нечетное» есть истинное высказывание. Примером дизъюнкции может служить и высказывание «$a \leqslant b$, верное тогда, когда верно хотя бы одно из высказываний $a < b$ или $a = b$».

Приведем несколько упражнений, которые помогут лучше понять роль и значение операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции в структуре сложных высказываний.

302. Какие из приведенных ниже высказываний верные, а какие неверные:

1) Деление $a:b$ без остатка возможно, если число a кратно числу b, $b \neq 0$.

2) Число 4 удовлетворяет неравенству $x < 8$ и неравенству $x > 2{,}5$.

3) Не все простые числа нечетные.

4) Число 0,5 удовлетворяет неравенствам: а) $x < 0{,}5$; б) $x \leqslant 0{,}5$; в) $x \geqslant 0{,}5$; г) $x > 0{,}5$.

5) Каждый треугольник имеет два тупых угла.

303. Сформулируйте отрицания высказываний:

1) Все числа, делящиеся на 3, нечетные.

2) Вертикальные углы равны.

3) Равные углы вертикальны.

4) Каждому натуральному числу предшествует одно натуральное число.

304. Истинны или ложны высказывания: 1) $A \wedge (\neg A)$; 2) $A \vee (\neg A)$; 3) $\neg(\neg A) = A$?

Предложенные в задаче 304 сложные высказывания имеют в логике специальные названия: $\neg(\neg A) = A$ — закон двойного отрицания; $A \wedge (\neg A)$ — закон противоречия; $A \vee (\neg A)$ — закон исключенного третьего. Эти высказывания часто применяются в доказательствах теорем, а законы противоречия и исключенного третьего лежат в основе доказательства методом сведения к противоречию (методом «от противного», как говорят иногда в школе).

«СЛЕДУЕТ», «РАВНОСИЛЬНО»

Кроме операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции для составления сложных высказываний используются и другие операции, применяющиеся в доказательствах теорем.

Импликация. Эта операция известна учащимся 7-го класса как «логическое следование» высказывания B из высказывания A (обозначается $A \Rightarrow B$). В русском языке $A \Rightarrow B$ обычно означает «из A следует B» или «если A, то B». Полезно знать, что тот же смысл имеют высказывания «A влечет B», «B при условии, что A», «A только тогда, когда B», «A есть достаточное условие для B» (или «A достаточно для B»), «B есть необходимое условие для A». Поэтому все названные высказывания могут быть записаны символически: $A \Rightarrow B$. Часто высказывание A в импликации $A \Rightarrow B$ называют посылкой (основанием), а высказывание B — следствием или заключением. Очевидно, что из истинности A следует истинность B, а из ложности B — ложность A.

Эквиваленция (логическая равносильность). Это операция над высказываниями A и B, при которой $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Обозначается: $A \Leftrightarrow B$. В словесной формулировке: «Если A, то B, и если B, то A», «A тогда и только тогда, когда B», «A есть необходимое и достаточное условие для B».

Решение следующих задач поможет лучше усвоить смысл и значение операций над высказываниями, т. е. поможет в развитии правильного мышления.

СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

305. В каждом из приведенных ниже математических предложений выделите условие и заключение:

1) Сумма двух четных чисел — четное число.

2) Если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.

3) Разность нечетных чисел — четное число.

4) Квадрат нечетного числа не делится на 4.

5) Произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

6) Произведение двух чисел равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0.

306. Выделите в следующих высказываниях условие и заключение:

1) Если в треугольнике все стороны равны, то и все его углы равны.

2) Вертикальные углы равны.

3) Если в треугольнике углы при основании равны, то треугольник равнобедренный.

4) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

5) Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно сумме длин радиусов этих окружностей.

ВЕРНЫЕ И НЕВЕРНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

307. Какие из приведенных ниже высказываний верные и какие неверные:

1) Если произведение двух натуральных чисел делится на 6, то хотя бы один из множителей делится на 6.

2) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулем.

3) Сумма двух нечетных чисел есть нечетное число.

4) Не существует целого числа, куб которого оканчивался бы цифрой 2.

5) Для того чтобы $a^3 = a^2$, необходимо, чтобы $a = 1$.

6) Для того чтобы куб целого числа делился на 5, необходимо, чтобы само число делилось на 5.

7) Квадрат любого четного числа делится на 4.

8) Всякое натуральное число, большее 1, делится хотя бы на одно простое число.

9) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

10) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.

11) Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$.

12) $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow (a + b \neq 0)$.

13) $(a + b \neq 0) \Rightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$.

14) $(a \in]0;\ 1[) \Leftrightarrow (\frac{1}{a} > 1)$.

15) $(a \neq 0 \wedge a \neq 1) \Rightarrow (\frac{1}{a} > 1)$.

16) $(|a| > 1) \Leftrightarrow (a \in]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[)$.

17) $(x \in [1;\ 3] \Rightarrow (x^2 \in [1;\ 9])$.

308. Доказать или опровергнуть следующие предложения:

1) $(a > b \wedge c < 0) \Rightarrow ac < bc$.

2) $(|b| < 2) \Rightarrow (b < 2)$.

3) $(|b| < 2) \Rightarrow (b > -2)$.

4) $(|b| < 2) \Rightarrow (b \in]-2;\ 2[)$.

5) $(a > b) \Leftrightarrow (ac > bc)$.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Условие называется необходимым, если оно вытекает (логически следует) из заключения. Условие называется достаточным, если из него вытекает (следует) заключение.

309. В каждом из следующих предложений вместо многоточия поставьте: «необходимо», или «достаточно», или «необходимо и достаточно».

1) Для того чтобы сумма двух целых чисел была четным числом, ..., чтобы каждое слагаемое было четным.

2) Для того чтобы число делилось на 15, ..., чтобы оно делилось на 5.

3) Для того чтобы число делилось на 3, ..., чтобы оно делилось на 6.

4) Для того чтобы число делилось на 10, ..., чтобы оно делилось на 2 и 5.

5) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была больше 30, ..., чтобы хотя бы одно из слагаемых было больше 15.

6) Для того чтобы произведение $(x-3)(x+2)(x-5)$ было равно 0, ..., чтобы $x = 3$.

7) Для того чтобы два квадрата имели одну и ту же площадь, ..., чтобы стороны их были равны.

8) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, ..., чтобы каждое слагаемое делилось на два.

9) Для того чтобы натуральное число делилось на 100, ..., чтобы это число делилось на 10.

10) Для того чтобы натуральное число делилось на 100, ..., чтобы это число делилось на 1000.

11) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы его диагонали были равны.

12) Для того чтобы четырехугольник был параллелограмм, ..., чтобы все стороны его были равны.

13) Для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, ..., чтобы все углы его были равны.

14) Для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, ..., чтобы его диагонали были равны.

15) Для того чтобы было верно неравенство $\frac{1}{x} < 1$, ..., чтобы было $x > 1$.

16) Для того чтобы было верно неравенство $\frac{1}{x} < 1$, ..., чтобы было $x < 0$ или $x > 1$.

310. Для того чтобы в одной и той же (или в равных) окружностях ду́ги, меньшие 180°, были равны, необходимо и достаточно, чтобы стягивающие их хорды были равны. Какими двумя высказываниями можно заменить это высказывание?

311. Для того чтобы в одной и той же окружности (или равных окружностях) хорды были равны, необходимо и достаточно, чтобы они были одинаково удалены от центра. Какими двумя высказываниями можно заменить это высказывание?

ОБРАТНАЯ И ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ ТЕОРЕМЫ

Пусть дано верное высказывание $A \Rightarrow B$. По нему может быть сформулировано обратное предложение. Для этого нужно «поменять местами» условие (посылку) и заключение данного высказывания (сделать условие заключением, а заключение условием). Получим $B \Rightarrow A$. Обратное предложение может оказаться и неверным. Очень часто это может быть обнаружено с помощью примера. Достаточно привести пример конкретного обратного высказывания, в котором условие было бы выполнено, а заключение оказалось бы неверным.

312. Для каждого из приведенных ниже предложений сформулируйте обратное и установите, будет оно верным или нет:

1) Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5.

2) Если каждое из двух слагаемых число четное, то сумма их — четное число.

3) Сумма трех нечетных чисел является нечетным числом.

4) Если a — целое число, то $6a$ также целое число.

5) Если число делится на 10, то оно делится на 5.

313. Для каждого из следующих высказываний сформулируйте обратное и установите, верно оно или нет:

1) Если углы вертикальны, то они равны.

2) Всякий равносторонний треугольник равнобедренный.

3) Всякий равносторонний треугольник равноугольный.

4) Если в треугольнике один угол тупой, то два остальных острые.

5) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны.

6) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

7) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

314. Для каждого из приведенных ниже верного или неверного предложений сформулируйте обратное и установите, верно оно или нет:

1) Если один из множителей равен 0, то произведение их также равно 0.

2) Если длины диагоналей четырехугольника равны, то такой четырехугольник является прямоугольником.

3) Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник является ромбом.

4) Если стороны одного острого угла соответственно перпендикулярны сторонам другого острого угла, то такие углы равны.

5) Симметричные относительно оси фигуры равны.

315. Для теоремы: «Четырехугольник, в котором диагонали точкой их пересечения делятся пополам, является параллелограммом», сформулируйте обратное предложение. Верно ли оно?

Для теоремы «$A \Rightarrow B$» можно сформулировать предложение, составленное с помощью импликации из отрицаний высказываний A и B, т. е. $\neg A \Rightarrow \neg B$. Такое предложение называют противоположным данному (т. е. противоположным $A \Rightarrow B$). При верной данной теореме противоположная ей может оказаться как верной, так и неверной.

316. Для теоремы: «Диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам» сформулируйте обратную теорему и докажите ее. Сформулируйте предложение, противоположное данному и противоположное обратному. Верны ли они?

317. Для теоремы: «Если число делится на 9, то сумма его цифр делится на 9» сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной теоремы. Верны ли они?

318. Верно ли утверждение: «Четырехугольник, у которого один из углов прямой и диагонали равны, является прямоугольником»?

319. О треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC \neq A_1C_1$ и $BC \neq B_1C_1$. Равны ли эти треугольники?

320. Верно ли следующее высказывание: «Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум

сторонам и углу другого треугольника, то эти треугольники равны»?

321. Для предложения «Прямые углы равны» сформулируйте противоположное, обратное и противоположное обратному. Какие из них верны?

322. Приведите примеры такого неверного высказывания, противоположное которому также было бы неверным.

323. Приведите пример такого неверного высказывания, обратное которому было бы неверным.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ И ВОПРОСЫ

324. Пусть сумма трех целых чисел — число четное. Сформулируйте предложение о произведении этих чисел.

325. Верно ли утверждение: «Если каждый из множителей не делится на данное число, то и произведение их не делится на это число»?

326. Докажите, что если произведение некоторого двузначного числа и числа 5 является двузначным числом, то первая (слева) цифра двузначного множителя равна 1.

327. Произведение двух натуральных чисел оказалось нечетным числом. Четным или нечетным числом будет сумма этих чисел? А если взять не два числа, а три?

328. Докажите, что если произведение двух натуральных чисел больше 82, то хотя бы одно из этих чисел больше 9. Сформулируйте обратное предложение. Будет ли оно верным?

329. Какое равенство может получиться при почленном сложении (вычитании, умножении, делении) двух неверных равенств? Приведите примеры.

ЗАДАЧИ

330. В одном доме живут 13 учеников одной и той же школы. В этой школе 12 классов. Докажите, что хотя бы два ученика, живущие в этом доме, учатся в одном и том же классе.

331. В школе 370 учащихся. Докажите, что среди учащихся этой школы обязательно найдутся хотя бы два ученика, отмечающие свое рождение в один и тот же день.

332. В одном хвойном лесу 550 000 елей. Ни на одной из них нет более 500 000 игл. Докажите, что по крайней мере у двух елей в этом лесу игл одинаковое число.

333. В корзине лежат яблоки двух сортов. Наугад берут из этой корзины несколько яблок. Какое наименьшее число яблок нужно взять, чтобы среди них оказались хотя бы два яблока одного сорта?

334. В коробке лежат 4 цветных карандаша и 10 простых. Из этой коробки берут наугад несколько карандашей. Какое наименьшее число карандашей надо взять из коробки, чтобы среди них обязательно оказалось не менее: 1) двух цветных; 2) трех простых?

335. Докажите, что любое число рублей можно уплатить, если покупатель и кассир имеют лишь трехрублевые и пятирублевые денежные знаки.

336. Докажите, что если даны какие-нибудь три натуральных числа, не делящиеся на 3, то либо сумма этих трех чисел делится на 3, либо сумма двух из них делится на 3.

337. О некотором числе известно, что оно нечетно, не делится на 5 и что квадрат его оканчивается той же цифрой, что и само число. Выясните, какая цифра стоит в конце этого числа.

338. Ученица хотела купить в магазине 9 тетрадей, несколько блокнотов, по 6 к. каждый, и 3 карандаша. Продавец выписал ей чек на 58 к. Взглянув на чек, ученица сразу же сказала продавцу, что он ошибся. Продавец удивился, как могла ученица так быстро обнаружить ошибку. Пересчитав снова, продавец действительно нашел ошибку. Как могла ученица, только взглянув на чек, заметить ошибку?

339. Всем членам одной семьи сейчас 73 года. Состав семьи таков: муж, жена, дочь и сын. Муж старше жены на 3 года, дочь старше сына на 2 года. Четыре года тому назад всем членам семьи было 58 лет. Сколько лет сейчас каждому члену этой семьи?

340. Два школьника, живущие в одном доме, одновременно вышли из дома в школу. Первый из них половину всего времени, затраченного на дорогу, шел со скоростью 5 км/ч, а затем шел со скоростью 4 км/ч. Второй же первую половину всего пути от дома до школы шел со скоростью 4 км/ч, а вторую — со скоростью 5 км/ч. Который из школьников пришел в школу раньше?

341. Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 3024. Найдите эти числа.

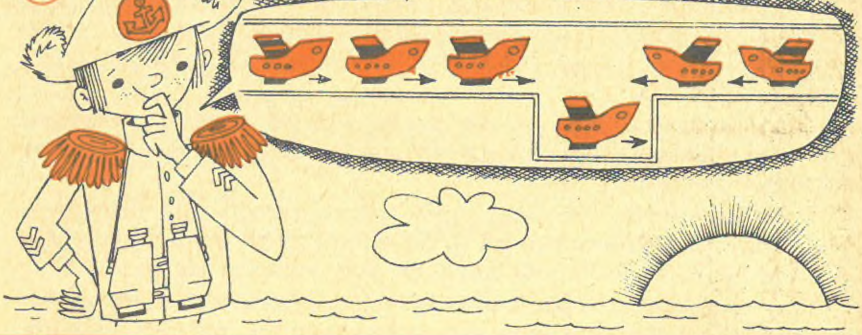
ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

342. Из пяти гирь одна должна быть в 10 кг. Какими должны быть остальные гири, чтобы на чашечных весах можно было определить массу грузов от 1 кг до 85 кг?

343. На складе имеются гвозди в ящиках по 24, 23, 17 и 16 кг. Может ли кладовщик отпустить со склада 100 кг гвоздей, не распечатывая ящики?

344. Имеется линейка без делений. Длина ее 13 см. Сколь-

12



ко промежуточных делений и какие нужно нанести на линейку, чтобы ею можно было измерить расстояния от 1 до 13 см (с точностью до 1 см)? Число делений должно быть минимальным.

345. Как, имея 22 спички, сложить контур прямоугольника с наибольшей площадью? Ломать спички нельзя.

346. На рисунке 12 изображены канал, бухта, 6 теплоходов и стрелками показаны направления движения теплоходов. Как могут разойтись теплоходы, если в бухте может задержаться, не мешая движению остальных, лишь один теплоход?

347. Требуется разделить 7 одинаковых яблок поровну между 8 приятелями. Как сделать так, чтобы разрезов пришлось произвести возможно меньше? А если бы эти яблоки пришлось разделить между 12 приятелями?

348. Четырем колхозникам нужно было переправиться через реку. Подойдя к ней, они увидели небольшую лодку, в которой плыли два мальчика. Колхозники попросили мальчиков перевезти их через реку, но оказалось, что в лодку могут сесть только два мальчика или же один взрослый. Мальчикам очень хотелось помочь колхозникам, и они придумали, как это можно сделать. Через некоторое время колхозники на этой лодке переправились через реку. Что же придумали мальчики?

349. Можно ли расставить на столе 4 пустые молочные бутылки так, чтобы горлышки их находились на одном и том же расстоянии друг от друга? (Бутылки можно ставить и вверх дном.)

350. Можно ли изготовить каркасную (проволочную) модель куба из одного куска проволоки (не разрезая проволоку на куски и не делая ребра двойными)? Как каркасную модель куба сделать из проволоки возможно проще? Сколько спаек придется сделать?

351. От сделанной из фанеры (или картона) шахматной

доски в 64 клетки отрезаны две клетки, находившиеся в противоположных углах. Можно ли все клетки оставшейся части покрыть 31 костью домино, каждая из которых покрывает ровно 2 клетки?

352. (Старинная китайская задача.) Крестьянин пришел на базар продавать бобы. Принес он их в очень просторном мешке, в котором было понемногу бобов и риса; бобы внизу, рис вверху, мешок был перевязан. После продажи бобов крестьянин должен разыскать родственников и подарить им рис. На базаре у крестьянина под руками была только веревочка. Ножа и иголки с ниткой у него не было. Как крестьянину продать бобы и унести рис в своем мешке родственникам?

353. Как с помощью масштабной линейки измерить диагональ кирпича?

354. Вот что рассказал один человек: «Проснувшись сегодня утром, я посмотрел на свои стенные часы. Они стояли. Других часов у меня не было. Радио молчало. Я подумал, как мне правильно поставить свои часы, и вот что я сделал. Встав, я отправился к приятелю, живущему через два квартала от меня. Придя к нему, я сразу же посмотрел на часы, которые шли правильно. Побеседовав немного с приятелем, я простился с ним, посмотрел на его часы еще раз и пошел домой. Как только пришел домой, я немедленно поставил свои часы и поставил их почти точно. Как я это сделал? Догадайтесь».

355. В старинных задачниках по арифметике можно встретить такую задачу: «Отец завещал трем своим сыновьям 19 лошадей. Старший сын должен получить $\frac{1}{2}$, средний — $\frac{1}{4}$ и младший — $\frac{1}{5}$ всех лошадей. Когда отец умер, его сыновья никак не могли поделить между собой завещанных им лошадей и решили обратиться за помощью к приятелю отца. Тот, подумав, решил помочь братьям. Для этого он привел свою лошадь, так что оказалось всего 20 лошадей. Из них 10 лошадей получил старший брат, 5 — средний, 4 — младший. Оставшуюся лошадь приятель отца отвел домой. Какая и кем допущена ошибка при разделе этого наследства?

356. Перед входом в парк культуры и отдыха продавали в киосках букетики цветов. В первом киоске было 33 букетика, во втором — 29, а в третьем — 27. Букетики были проданы одновременно по одной и той же цене. Распродав цветы, подсчитали полученные деньги. Оказалось, что в каждом киоске продано цветов на одну и ту же сумму. Как это могло случиться?

357. Кузнецу принесли 5 обрывков цепи, по 3 звена в каждом, и попросили соединить их в одну цепь. Кузнец задумался, как выполнить этот заказ проще. Сколько же звеньев нужно разъединить, а затем вновь соединить, чтобы все обрывки обра-

зовали одну цепь? Подумав, кузнец приступил к делу и, раскрыв только три звена, выполнил заказ. Как это сделал кузнец?

358. Из 5 кусков цепи, состоящих соответственно из 10, 9, 7, 4 и 3 звеньев, нужно составить одну цепь в 33 звена. Как это сделать так, чтобы пришлось возможно меньше сделать разрезов и последующих сварок?

359. На постоялый двор приехал путешественник. Денег у него с собой не было, но была серебряная цепочка из шести звеньев. Хозяин гостиницы согласился принять в оплату номера за каждый день одно звено этой цепочки, но так, чтобы распиленных звеньев он получил не более одного. Как путешественнику следует распилить цепочку, чтобы можно было расплатиться с хозяином постоялого двора в течение пяти дней?

360. В детский сад, где было 50 детей, прислали яблоки: 60 крупных и 60 помельче. Было решено распределить их так: крупные раздать 30 детям, по 2 штуки каждому, а мелкие — остальным 20, по 3 штуки. При таком способе распределения яблок хватило бы всем детям. Но при перевозке оба сорта яблок смешались. Тогда дежурный решил поступить так: раздавать по 5 яблок из общей кучи на каждых двух детей. К его удивлению, для последних двух ребят яблок не осталось. Почему же так получилось?

361. Пионеру одного звена, который умел рисовать, вожатый дал задание — нарисовать всех тех пионеров звена, которые не могут себя нарисовать. Пионер нарисовал всех, кроме себя, и задумался, как ему быть с самим собой. Если он себя нарисует, то этого он не должен делать, но если он себя не нарисует, то должен себя нарисовать. В самом деле, как же быть пионеру-художнику?

362. На сборе одного пионерского отряда затейники взяли пять одинаковых по размерам квадратиков бумаги: два из них белого цвета, а три — красного. Затем поставили рядом трех пионеров: Васю, Колю и Петю, — попросили каждого из них отвести одну руку за спину, и каждому так, чтобы он не видел, вложили в эту руку квадратик красного цвета, а остальные два квадратика убрали. После этого каждому из трех пионеров разрешили посмотреть, какого цвета квадратики в руках у двух остальных, а затем каждому было предложено быстро сообразить, не отводя руки из-за спины, какого цвета у них квадратик. Коля первым догадался. Как он рассуждал?

363. Из квадрата бумаги, сторона которого равна 3 единицам длины, нужно вырезать фигуру, представляющую собой развертку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1 единице длины. Как это можно сделать?

364. В классе 30 учащихся. Из них 18 занимаются в секции легкой атлетики, 10 — в секции плавания и 3 — в обеих секциях. Сколько учащихся этого класса не занимаются ни в одной из этих секций?

365. В одном украинском городе все жители говорят на русском или украинском языке. По-украински говорят 85% всех жителей, а по-русски — 75%. Сколько процентов всех жителей этого города говорят на обоих языках?

366. Из 100 туристов, выехавших в заграничное путешествие, владеют немецким языком 30 человек, английским — 28, французским — 42, английским и немецким — 8, английским и французским — 10, немецким и французским — 5, тремя этими языками — 3. Сколько туристов не владеют ни одним из этих языков, владеют одним английским, одним французским, одним немецким?

367. В одной семье было много детей. Семеро из них любили капусту, шестеро любили морковь, пятеро — горох. Четверо из детей любили капусту и морковь, трое любили капусту и горох, двое — морковь и горох, а один — и капусту, и морковь, и горох. Сколько было детей в этой семье?

368. В отчете об изучении иностранных языков студентами некоторой специальности говорилось, что всех студентов 100 человек, из них 5 человек изучают английский, немецкий и французский языки, 10 — английский и немецкий, 8 — французский и английский, 20 — немецкий и французский, 30 — английский, 23 — немецкий, 50 — французский. Тому, кто составил этот отчет, было указано на ошибки. Верно ли это?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ

Софизмом называется умышленно ложное умозаключение, которое имеет видимость правильного. Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Особенно часто в математических софизмах выполняются «запрещенные» действия или не учитываются условия применимости теорем, формул и правил. Иногда рассуждения ведутся с использованием ошибочного чертежа или опираются на приводящие к ошибочным заключениям «очевидности». Встречаются софизмы, содержащие и другие ошибки.

В истории развития математики софизмы играли существенную роль. Они способствовали повышению строгости математических рассуждений и содействовали более глубокому уяснению понятий и методов математики. Роль софизмов в развитии математики сходна с той ролью, какую играют непреднамеренные ошибки в математических исследованиях, допускаемые даже выдающимися математиками. И. П. Павлов говорил, что «правильно понятая ошибка — это путь к открытию». Действительно, уяснение ошибок в математических рассуждениях часто содействовало развитию математики.

3 Зак. 706. Нагибин «Математическая шкатулка».

Пожалуй, особенно поучительна в этом отношении история аксиомы Евклида о параллельных прямых. Сформулировать эту аксиому можно так: через данную точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной (что одну прямую, параллельную данной, можно провести — это доказывается). Это утверждение на протяжении более чем двух тысяч лет пытались доказать, т. е. вывести из остальных аксиом* геометрии, многие выдающиеся математики разных времен и разных народов. Все эти попытки не увенчались успехом. Многочисленные «доказательства», какие были найдены, оказались ошибочными.

«Строгого доказательства сей истины, — писал великий русский математик Н. И. Лобачевский в 1823 г. в своем учебнике геометрии, — до сих пор не могли сыскать; какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами». И все же, несмотря на ошибочность этих «доказательств», они принесли большую пользу развитию геометрии. Были основательно выяснены связи между различными теоремами геометрии. Можно сказать, что эти «доказательства» подготовили одно из величайших достижений в области геометрии и всей математики — создание неевклидовой геометрии. Честь разработки новой геометрии принадлежит нашему великому соотечественнику Н. И. Лобачевскому и венгерскому математику Яношу Бойяи. Н. И. Лобачевский и сам сначала пытался доказать аксиому параллельных, но скоро понял, что этого сделать нельзя. В 1826 г. он пришел к заключению, что утверждение, выражаемое аксиомой о параллельных, при помощи остальных аксиом геометрии доказать нельзя. Путь, идя которым Лобачевский убедился в этом, и привел его к созданию новой геометрии. И этот замечательный вклад в математику был одним из тех, которые прославили русскую науку.

Примеров подобного рода можно было бы привести несколько.

Чем же полезны софизмы для изучающих математику? Что они могут дать?

Разбор софизмов прежде всего развивает логическое мышление, т. е. прививает навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку в софизме — это значит осознать ее, а осознание ошибки предупреждает от повторения ее в других математических рассуждениях. Когда ребенок раз притронется к горячему предмету, то впоследствии он постарается этого не делать. Он будет много осторожнее. Так изучающий математику впоследствии проявит больше осторожности.

---

* Аксиомы — это исходные положения, принимаемые без доказательства. Особенности аксиомы параллельных давали повод думать, что она может быть превращена в теорему, т. е. доказана с помощью остальных аксиом геометрии.

Далее, что особенно важно, разбор софизмов помогает сознательному усвоению изучаемого математического материала, развивает наблюдательность, вдумчивость и критическое отношение к тому, что изучается. Математические софизмы приучают внимательно и настороженно продвигаться вперед, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записей и чертежей, за допустимостью обобщений, за законностью выполняемых операций. Все это нужно и важно.

Наконец, разбор софизмов увлекателен. Только очень сухого человека не может увлечь интересный софизм. Как приятно бывает обнаружить ошибку в математическом софизме и тем как бы восстановить истину в ее правах. И чем труднее софизм, тем большее удовлетворение доставляет его анализ.

Имеется немало разных книг, в которых собраны различные софизмы. В конце XIX — начале XX в. особенно большой известностью среди учащихся пользовалась книга Обреимова «Математические софизмы». Этой книжкой зачитывались. Трудно было найти гимназиста, который не читал бы ее. Василию Ивановичу Обреимову, передовому, революционно настроенному деятелю народного образования последних десятилетий XIX и начала XX в. удалось собрать и обработать интересные софизмы. Наверное, этот сборник софизмов имел в виду В. И. Ленин, когда он в одной из своих статей писал, что такие сборники учащимся «приносят свою пользу».

В. И. Ленину в борьбе, которую он вел с врагами рабочего класса, часто приходилось разбирать и разоблачать разнообразные политические софизмы своих противников. Рассуждения по вопросам политики, содержащие замаскированные ошибки, В. И. Ленин сравнивал с математическими софизмами. Он говорил, что эти рассуждения похожи, «...как две капли воды, на те рассуждения, которые математики называют математическими софизмами и в которых, — строго логичным, на первый взгляд, путем, — доказывается, что дважды два пять, что часть больше целого и т. д.»*. Эти слова В. И. Ленина показывают, что он знал математические софизмы и это знание помогало ему разоблачать софизмы в политике.

В нашей «Математической шкатулке» приводятся ниже некоторые софизмы. При разборе их постарайтесь самостоятельно найти допущенные ошибки и отчетливо понять их. Ну, а если ошибки вы не обнаружите и указания, данные в конце книги, вам не помогут, то обратитесь за разъяснениями к вашему учителю. Помните, что важно добиться отчетливого понимания ошибок, иначе софизмы будут бесполезны.

Наблюдательный и вдумчивый читатель, конечно, заметит, что во многих софизмах допущены одинаковые ошибки. Отчетливое понимание сути таких ошибок значительно облегчит решение последующих аналогичных задач.

---

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 8, с. 67.

369. **4 р. = 40 000 к.** Возьмем верное равенство: 2 р. = 200 к. и возведем его по частям в квадрат. Мы получим: 4 р. = = 40 000 к. В чем ошибка?

370. **5 = 6.** Попытаемся доказать, что 5 = 6. С этой целью возьмем числовое тождество: $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$. Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки. Получим: $5(7 + 2 - 9) = 6(7 + 2 - 9)$. Разделим обе части этого равенства на общий множитель (заключенный в скобки). Получаем $5 = 6$. В чем ошибка?

371. $2 \cdot 2 = 5$. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Имеем числовое равенство (верное): $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части его общий множитель. Получим: $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.

372. **4 = 5.** Где допущена ошибка в следующей цепочке равенств: $16 - 36 = 25 - 45$, $16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$, $(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2$, $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$, $4 = 5$?

373. $2 \cdot 2 = 5$. Обозначим: $4 = a$, $5 = b$, $\frac{a + b}{2} = d$. Имеем: $a + b = 2d$, $a = 2d - b$, $2d - a = b$. Перемножим два последних равенства по частям. Получим: $2da - a^2 = 2db - b^2$. Умножим обе части получившегося равенства на -1 и прибавим к результатам d^2. Будем иметь: $a^2 - 2da + d^2 = b^2 - 2db + d^2$, или $(a - d)^2 = (b - d)^2$, откуда $a - d = b - d$ и $a = b$, т. е. $2 \cdot 2 = 5$. Где допущена ошибка?

374. **2 = 3.** Имеем: $4 - 10 = 9 - 15$, $4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}$, $(2 - \frac{5}{2})^2 = (3 - \frac{5}{2})^2$, $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$ и окончательно $2 = 3$. В чем ошибка?

375. **5 = 1.** Желая доказать, что $5 = 1$, будем рассуждать так. Из чисел 5 и 1 по отдельности вычтем одно и то же число 3. Получим числа 2 и -2. При возведении в квадрат этих чисел получаются равные числа 4 и 4. Значит, должны быть равны и исходные числа 5 и 1. Где ошибка?

376. **4 = 8.** Возьмем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x - 2 = -\frac{y}{2}. \end{cases}$$

Решим ее способом подстановки. Получим: $4 - y + y = 8$, т. е. $4 = 8$. В чем здесь дело?

377. **Все числа равны между собой.** Пусть $m \neq n$. Возьмем тождество: $m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2$. Имеем: $(m - n)^2 = (n - m)^2$. Отсюда $m - n = n - m$, или $2m = 2n$, а значит, $m = n$. В чем ошибка?

378. **Расстояние от Земли до Солнца равно толщине волоска.** Пусть a(м) — расстояние от Земли до Солнца, а b(м) — толщина волоска. Среднее арифметическое их обозначим через v. Имеем: $a+b=2v$, $a=2v-b$, $a-2v=-b$. Перемножив по частям два последних равенства, получаем: $a^2-2av=b^2-2bv$. Прибавим к каждой части v^2. Получим: $a^2-2av+v^2=b^2-2bv+v^2$, или $(a-v)^2=(b-v)^2$, т. е. $(a-v)=(b-v)$, и, значит, $a=b$. Где мы ошиблись?

379. **Любое, отличное от нуля, число равно противоположному ему числу.** Какая ошибка допущена в следующих рассуждениях? Возьмем произвольное, отличное от 0, число a. Обозначим его буквой x, $x=a$. Обе части этого равенства умножим на $-4a$. Получим: $-4ax=-4a^2$, или $-4ax+4a^2=0$. К обеим частям этого равенства прибавим x^2. Получим: $x^2-4ax+4a^2=x^2$, или $(x-2a)^2=x^2$. Значит, $x-2a=x$, но $x=a$, поэтому $a-2a=a$, или $-a=a$.

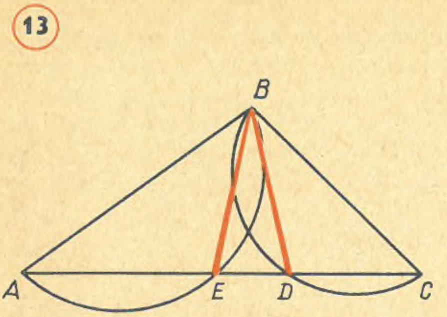
380. **Любое число равно его половине.** Возьмем два равных числа a и b, $a=b$. Обе части этого равенства умножим на a и затем вычтем из произведений по b^2. Получим: $a^2-b^2=ab-b^2$, или $(a+b)(a-b)=b(a-b)$. Отсюда $a+b=b$, или $a+a=a$, так как $b=a$. Значит, $2a=a$, или $a=\frac{a}{2}$. Какая ошибка допущена в этих рассуждениях?

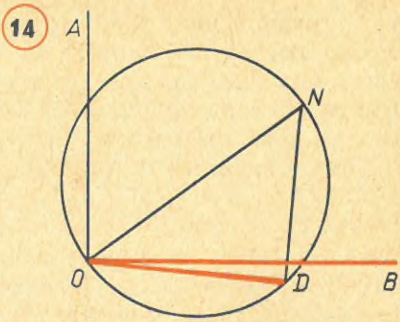
381. **Спичка вдвое длиннее телеграфного столба.** Пусть a — длина спички (дм) и b — длина столба (дм). Разность между b и a обозначим через c. Имеем: $b-a=c$, $b=a+c$. Перемножая два эти равенства по частям, находим: $b^2-ab=ca+c^2$. Вычтем из обеих частей bc. Получим: $b^2-ab-bc=ca+c^2-bc$, или $b(b-a-c)=-c(b-a-c)$, откуда $b=-c$, но $c=b-a$, поэтому $b=a-b$, или $a=2b$.

382. **$1=-1$.** Начнем с верного числового равенства: $16-24+9=4-12+9$. Перепишем его в виде: $(4-3)^2=(2-3)^2$. Значит, $4-3=2-3$, т. е. $1=-1$. Где ошибка?

383. **Отрицательное число больше положительного.** Возьмем два положительных числа a и b. Сравним два отношения: $\frac{a}{-b}$ и $\frac{-a}{b}$ Они равны, так как каждое из них равно $-\frac{a}{b}$. Можем составить пропорцию: $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$. Но если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то предыдущий член второго отношения также больше своего последующего. В нашем случае $a>-b$; следовательно, должно быть $-a>b$, т. е. отрицательное число больше положительного. В чем ошибка?

384. **Из двух неравных чисел первое всегда больше второго.** Пусть a и b — произвольные числа и $a\neq b$. Имеем: $(a-b)^2>0$, т. е. $a^2-2ab+b^2>0$, или $a^2+b^2>2ab$. К обеим





частям получившегося неравенства прибавим $-2b^2$. Получим: $a^2-b^2>2ab-2b^2$, или $(a+b)(a-b)>2b(a-b)$. После деления обеих частей на $a-b$ имеем: $a+b>2b$, откуда следует, что $a>b$. Где мы ошиблись?

385. **Любое число равно числу, в два раза большему его.** Пусть a — какое угодно число. Возьмем тождество $a^2-a^2=a^2-a^2$. В левой части его вынесем a за скобки, а правую часть разложим на множители по формуле разности квадратов. Тогда получим: $(a-a)a=(a-a)(a+a)$. Упростив это тождество, получим: $a=2a$. В чем здесь ошибка?

386. **Любое число равно 0.** Найдите ошибку в таком рассуждении. Каково бы ни было число a, верны равенства: $(+a)^2=a^2$ и $(-a)^2=a^2$. Следовательно, $(+a)^2=(-a)^2$, а значит, $+a=-a$, или $2a=0$, и поэтому $a=0$.

387. **1 = 2.** Где ошибка в следующей цепочке следствий из верного утверждения: $1-3=4-6$, $1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4}$,

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2,\ \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2},\ 1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2},\ 1=2?$$

388. **Из точки на прямую можно опустить два перпендикуляра.** Попытаемся «доказать», что через точку, лежащую вне прямой, к этой прямой можно провести два перпендикуляра. С этой целью возьмем треугольник ABC (рис. 13). На сторонах AB и BC этого треугольника, как на диаметрах, построим полуокружности. Пусть эти полуокружности пересекаются со стороной AC в точках E и D. Соединим точки E и D прямыми с точкой B. Угол AEB прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр; угол BDC также прямой. Следовательно, $BE\perp AC$ и $BD\perp AC$. Через точку B проходят два перпендикуляра к прямой AC. В чем ошибка?

389. **Из точки, взятой на прямой, можно провести к**

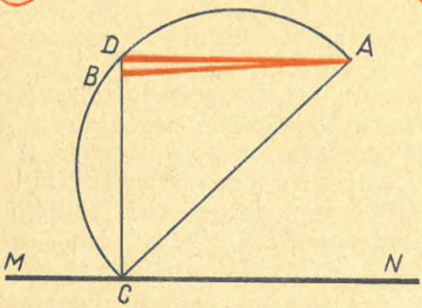
этой прямой два перпендикуляра (лежащие с ней в одной плоскости). Найдите ошибку в таком «доказательстве». Возьмем прямой угол AOB (рис. 14). Через вершину O проведем внутри угла произвольный луч и на нем от точки O отложим произвольный отрезок ON. Из середины этого отрезка, как центра, опишем окружность, проходящую через точки O и N. Проведем через точку N прямую, параллельную AO. Пусть эта прямая пересекает окружность в точке D. Соединим отрезком точки O и D. Угол ODN, как вписанный, опирающийся на диаметр, прямой, а так как $ND \parallel AO$, то угол DOA тоже прямой. Следовательно, $OB \perp AO$ и $OD \perp AO$.

390. **Через точку, лежащую вне прямой, можно провести две прямые, параллельные данной прямой.** Дана прямая MN и вне ее точка A. Проведем через точку A прямую AB, параллельную прямой MN. Возьмем на MN некоторую точку C. На отрезке AC, как на диаметре, построим полуокружность. Пусть D — точка пересечения этой полуокружности с перпендикуляром к прямой MN, проходящим через точку C. Через точки A и D проведем прямую. Так как угол CDA прямой, а $CD \perp MN$, то AD — прямая, параллельная MN. Следовательно, через A проходят две прямые, параллельные прямой MN (рис. 15). В чем ошибка?

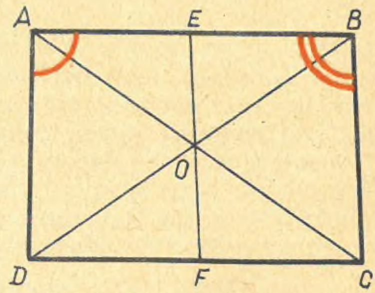
391. **Прямой угол равен тупому.** Для доказательства выполним следующее построение. Возьмем некоторый отрезок AB и при концах его A и B построим прямой угол и тупой (рис. 16). На сторонах этих углов от их вершин отложим равные отрезки AD и BC. Отрезки AB и DC разделим каждый пополам и через точки деления проведем к этим отрезкам перпендикуляры. Так как AB и DC непараллельны, то эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O. Соединим точку O с точками A, B, C и D отрезками. Получившиеся треугольники AOD и BOC равны, так как $|AO| = |OB|$, $|AD| = |BC|$, $|DO| = |CO|$, и, значит, $\angle OAD = \angle OBC$, но $\angle EAO = \angle EBO$, поэтому $\angle DAE = \angle CBE$, т. е. прямой угол равен тупому. Аналогично могут быть рассмотрены случаи, когда точка O лежит на AB или ниже AB (рис. 17). Вывод и в этих случаях будет такой же: прямой угол равен тупому. В чем здесь дело?

392. **Всякий треугольник равнобедренный.** Пусть ABC (рис. 18) — произвольный треугольник. Проведем биссектрису угла A и перпендикуляр к стороне BC, проходящий через ее середину D. Может оказаться так, что точка пересечения биссектрисы и перпендикуляра (точка K) будет лежать внутри треугольника ABC. Опустим из точки K перпендикуляры KE и KF на стороны AC и AB. Имеем: $\triangle AEK = \triangle AFK$, а значит, $|KE| = |KF|$ и $|AE| = |AF|$. Треугольники BKD и CKD также равны, а поэтому $|KB| = |KC|$. Остается рассмотреть прямоугольные треугольники BKF и CKE. Они равны, так как $|KE| = |KF|$ и $|KB| = |KC|$. Из равенства этих треуголь-

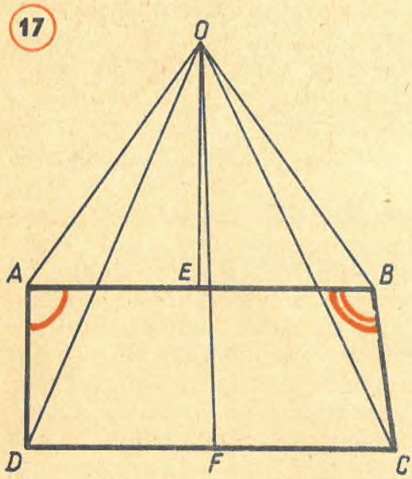
15



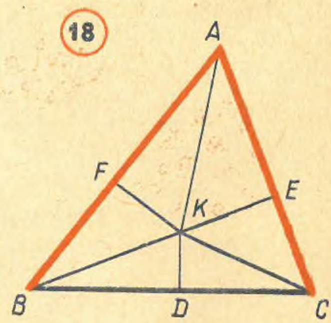
16



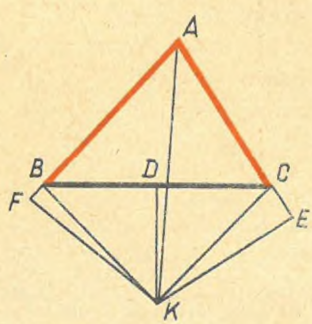
17



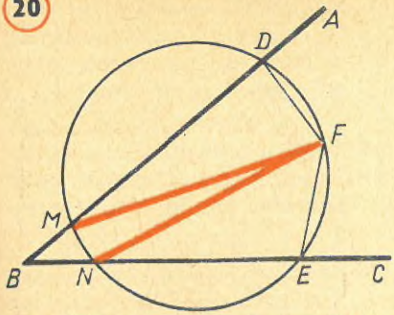
18



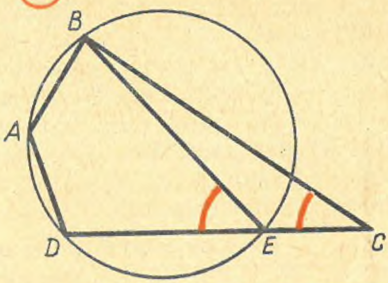
19



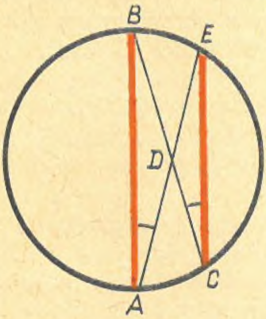
20



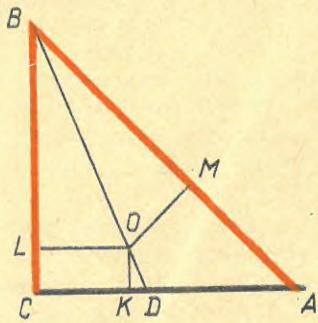
21



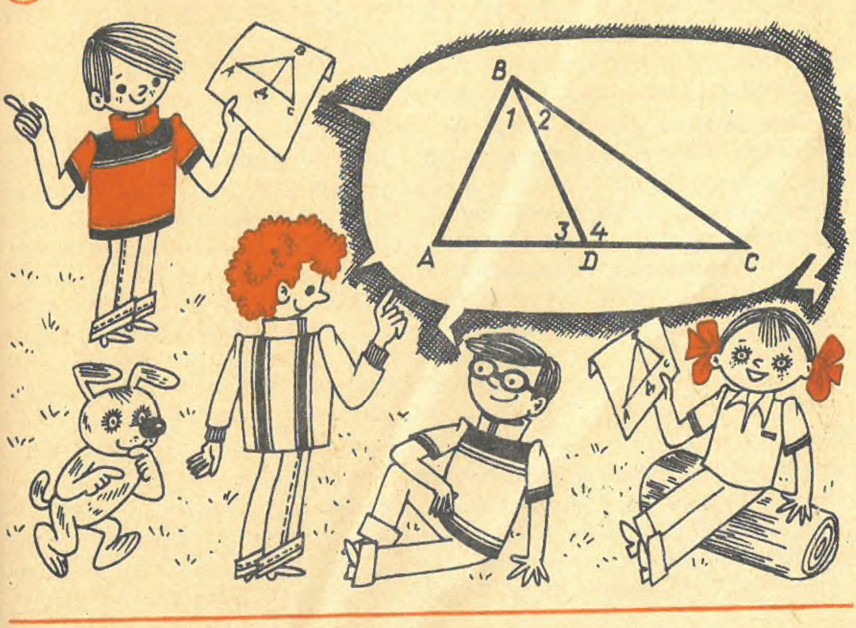
22



23



24



ников вытекает, что $|EC| = |FB|$. Возьмем теперь два равенства: $|AE| = |AF|$ и $|CE| = |BF|$. Сложив их по частям, получаем: $|AC| = |AB|$. Аналогично можно провести рассуждения в случае, если точка K будет лежать вне треугольника ABC (рис. 19). Рассуждения в случае, если точка K будет лежать на стороне BC (совпадает с D), также не сложны (проведите их сами). Во всех этих случаях приходим к выводу, что треугольник ABC равнобедренный. Значит, любой треугольник равнобедренный. Где ошибка?

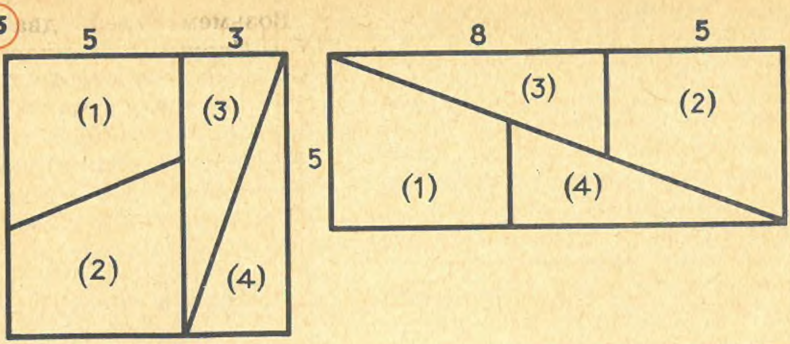
393. **Всякая окружность имеет два центра.** Построим острый угол ABC (рис. 20). На сторонах его возьмем точки D и E и через них проведем перпендикуляры к сторонам угла. Пусть эти перпендикуляры пересекаются в точке F. Через три точки D, F и E проведем окружность. Эта окружность пересечет стороны угла в точках M и N. Отрезки MF и NF должны быть диаметрами построенной окружности, так как на них опираются вписанные в эту окружность прямые углы MDF и NEF. Середины отрезков MF и NF должны быть центрами построенной окружности. Следовательно, окружность имеет два центра. Где ошибка?

394. **Внешний угол треугольника равен внутреннему, с ним не смежному.** Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором сумма углов A и C равна 180° (рис. 21). Через вершины D, A и B проведем окружность. Пусть эта окружность пересечет сторону DC в точке E. Соединим точку E с точкой B отрезком прямой линии. Тогда $\angle C = 180° - \angle A$ (по построению), $\angle BED = 180° - \widehat{A}$ (так как четырехугольник $ABED$ вписанный, а значит, сумма противоположных углов его BED и BAD равна 180°). Следовательно, $\angle C = \angle BED$, но $\angle BED$ — внешний угол треугольника CBE, а $\angle C$ — не смежный с ним внутренний угол этого треугольника. Найдите ошибку.

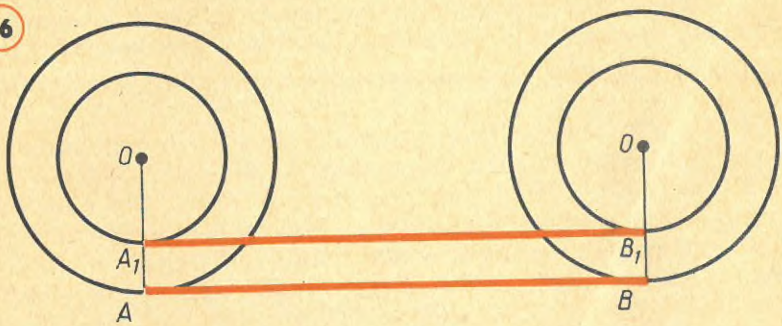
395. **Хорда окружности, не проходящая через центр, равна диаметру.** Пусть в окружности проведен диаметр AB. Через точку B проведем какую-либо хорду BC, не проходящую через центр; затем через середину этой хорды D и точку A проведем новую хорду AE; наконец, точки E и C соединим отрезком (рис. 22). Рассмотрим треугольники ABD и EDC. В них $|BD| = |DC|$ (по построению), $\angle A = \angle C$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, $\angle BDA = \angle EDC$ (как вертикальные). Если же сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Значит, $\triangle BDA = \triangle EDC$. Поэтому $|AB| = |EC|$. Где ошибка?

396. **Катет равен гипотенузе** (рис. 23). $\angle C = 90°$, BD — биссектриса угла CBA, $|CK| = |KA|$, $OK \perp CA$, O — точка пересечения прямых OK и BD, $OM \perp AB$, $OL \perp BC$. Имеем: $\triangle LBO = \triangle MBO$, $|BL| = |BM|$, $|OM| = |OL| = |CK| = |KA|$, $\triangle KOA = \triangle OMA$ (OA — общая сторона, $|KA| =$

25



26



$= |OM|$, $\angle OKA = \angle OMA = 90°$), $\angle OAK = \angle MOA$, $|OK| = |MA| = |CL|$, $|BA| = |BM| + |MA|$, $|BC| = |BL| + |LC|$, но $|BM| = |BL|$, $|MA| = |CL|$, и поэтому $|BA| = |BC|$. Где допущена ошибка?

397. **«Доказательство» теоремы о сумме внутренних углов треугольника, не опирающееся на аксиому параллельных прямых.** Возьмем произвольный треугольник ABC (рис. 24), на стороне AC его произвольную точку D и соединим ее отрезком с B. Обозначим искомую сумму внутренних углов треугольника буквой x. Имеем: $\angle A + \angle 1 + \angle 3 = x$, $\angle C + \angle 2 + \angle 4 = x$. Сложим по частям эти равенства: $(\angle A + \angle C + \angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 2x$. Выражение в первых скобках — сумма углов треугольника ABC; она равна x. Выражение во вторых скобках равно $180°$ (как сумма смежных углов). Имеем: $x + 180° = 2x$ и $x = 180°$. Верно ли это?

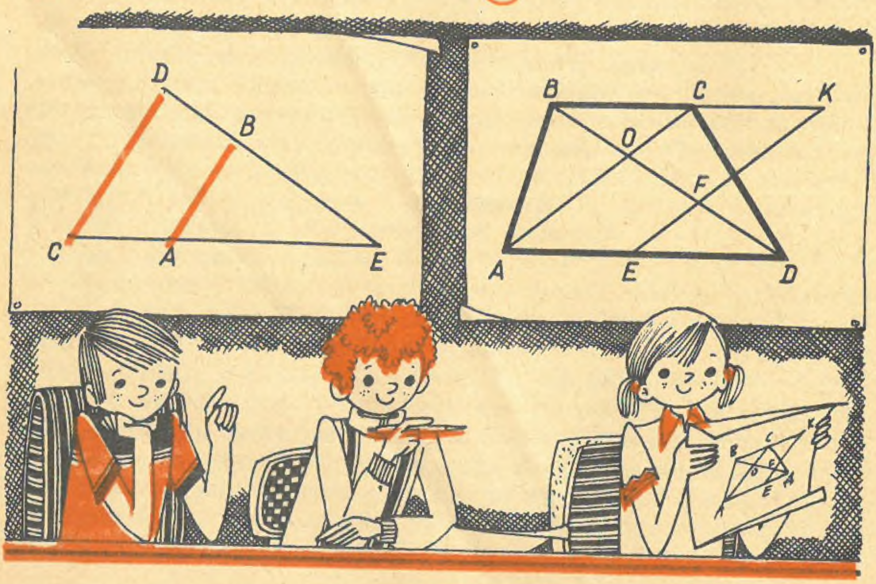
398. **$64 = 65$.** Квадрат со стороной, равной 8 единицам длины, разрезан на 4 части, как показано на рисунке 25. Из этих частей сложен прямоугольник. Основание этого прямоугольника оказалось равным 13 единицам длины, а высота — 5 единицам. Площадь исходного квадрата равна 64 квадратным единицам, а получившегося из него прямоугольника — 65 квадратным единицам. Значит, $64 = 65$. В чем ошибка?

399. Длины всех окружностей равны. Соединим неподвижно относительно друг друга два разных круга (с неравными радиусами) так, чтобы центры их совпали. Заставим эти круги перемещаться так, чтобы больший из них покатился без скольжения по прямой линии и сделал полный оборот (рис. 26). Тогда отрезок AB прямой линии будет иметь длину, равную длине окружности большего круга (с радиусом OA). Меньший круг, неподвижно скрепленный с бóльшим, также сделает полный оборот. Отрезок A_1B_1 будет иметь длину, равную длине окружности меньшего круга (с радиусом OA_1). А так как $|AB| = |A_1B_1|$ (как противоположные стороны прямоугольника), то, следовательно, длины этих двух окружностей равны. В чем тут дело?

400. Любые два отрезка параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, равны (рис. 27). Так как $AB \parallel CD$, то $\triangle ABE \backsim \triangle CDE$, и поэтому $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|DE|}$, или $|AE| \times |DE| = |CE|\ |BE|$. Получившееся равенство умножим по частям на $|AB| - |CD|$. Получим: $|AE|\ |DE|\ (|AB| - |CD|) = |CE|\ |BE|\ (|AB| - |CD|)$, или $|AE|\ |DE| \times |AB| - |AE|\ |DE|\ |CD| = |CE|\ |BE|\ |AB| - |CE|\ |BE| \times |CD|$, что можно переписать так: $|AE|\ |DE|\ |AB| - |CE| \times |BE|\ |AB| = |AE|\ |DE|\ |CD| - |CE|\ |BE|\ |CD|$, или $|AB|\ (|AE|\ |DE| - |CE|\ |BE|) = |CD|\ (|AE|\ |DE| - |CE| \times |BE|)$, откуда получаем: $|AB| = |CD|$. Где ошибка?

27

28



401. Длина средней линии трапеции равна нулю (рис. 28). $ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, O — точка пересечения диагоналей. Выполним следующее построение: BK — продолжение BC, $|BK| = |AD|$, $|DE| = |BC|$. Введем обозначения: $|BO| = x$, $|OF| = y$, $|FD| = z$. Имеем: $\triangle DEF \sim \triangle BKE$, откуда $\frac{|BF|}{|FD|} = \frac{|BK|}{|DE|}$, или $\frac{x+y}{z} = \frac{|AD|}{|BC|}$ (1). $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, откуда $\frac{|DO|}{|BO|} = \frac{|AD|}{|BC|}$, или $\frac{y+z}{x} = \frac{|AD|}{|BC|}$ (2). Сравнив (1) и (2), получаем: $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x}$, или $\frac{x+y}{z} = \frac{-y-z}{-x}$. Обозначив каждое из этих отношений через t, получаем: $\frac{x+y}{z} = t$, $\frac{-y-z}{-x} = t$, откуда имеем: $x + y = tz$, $-y - z = -tx$. Просуммировав полученные равенства по частям, получаем: $x + y - y - z = t(z - x)$, или $\frac{x+y-y-z}{z-x} = t$, и поэтому $\frac{x-z}{z-x} = \frac{x+y}{z}$, или $\frac{x+y}{z} = -1$. Но $\frac{x+y}{z} = \frac{|AD|}{|BC|}$, и поэтому $\frac{|AD|}{|BC|} = -1$, т. е. $|AD| = -|BC|$. Значит, $|AD| + |BC| = 0$ и $\frac{|AD| + |BC|}{2} = 0$. Где ошибка?

402. «Новое доказательство» теоремы Пифагора. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острым углом α, противолежащим катету a. Имеем: $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, откуда $a^2 = c^2 \sin^2 \alpha$, $b^2 = c^2 \cos^2 \alpha$. Просуммировав по частям эти равенства, получаем: $a^2 + b^2 = c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$. Но $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, и поэтому $a^2 + b^2 = c^2$. Подвергните критике это «доказательство».

403. Квадрат любого числа равен 1. Пусть m — какое угодно число. Обозначим: $x = y = \frac{m^4}{4}$. Имеем: $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ и $x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y}$, или $x - y = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ что можно переписать так: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$. Из полученного равенства находим: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Следовательно, $2\sqrt{x} = 1$, но $x = \frac{m^4}{4}$, и поэтому $2\sqrt{\frac{m^4}{4}} = 1$, или $m^2 = 1$. Где ошибка?

404. $2 = 4$. Имеем тождество: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, откуда $(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$, или $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$. К обеим частям полученного равенства прибавим 3. В полученное равенство подставим вместо x $180°$. Будем иметь: $-1 + 3 = 1 + 3$, т. е. $2 = 4$.

ГДЕ ОШИБКА?

405. Ученик следующим образом выполнил сокращение дроби, получив верный результат (рис. 29). Правильно ли выполнено сокращение?

406. Ученик составил таблицу значений функции $y=\frac{1}{x}$.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Затем построил точки по найденным их координатам, соединил их отрезками прямых, получив график (рис. 30). Найти ошибки. Что нужно сделать, чтобы устранить ошибки?

407. Два ученика решили уравнение $5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$ различными способами. Решение первого ученика:

$5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$, $x\sqrt{2x}=3\cdot 2\sqrt{2x}$, $\sqrt{2x}(x-6)=0$,

$\sqrt{2x}=0$, или $x-6=0$, $\sqrt{2x}=0 \Leftrightarrow x=0$, $x-6=0 \Leftrightarrow x=6$.

Ответ: $x=0$, $x=6$. Решение второго ученика: $5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$, $x\sqrt{2x}=3\sqrt{8x}$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x^3=72x \Leftrightarrow 2x(x-6)(x+6)=0$. Ответ: $x=0$, $x=6$, $x=-6$.

1) Которое решение выполнено правильно? 2) Объясните допущенные ошибки.

408. Два ученика вычисляли при $n=3$ значение выражения $n+\sqrt{1-2n+n^2}$ каждый своим способом.

Один из них рассуждал так: $n+\sqrt{1-2n+n^2}=n+\sqrt{(1-n)^2}=n+1-n=1$ при любых n.

Другой сразу подставлял в алгебраическое выражение заданное значение n : $3+\sqrt{1-2\cdot 3+3^2}=3+\sqrt{4}=5$.

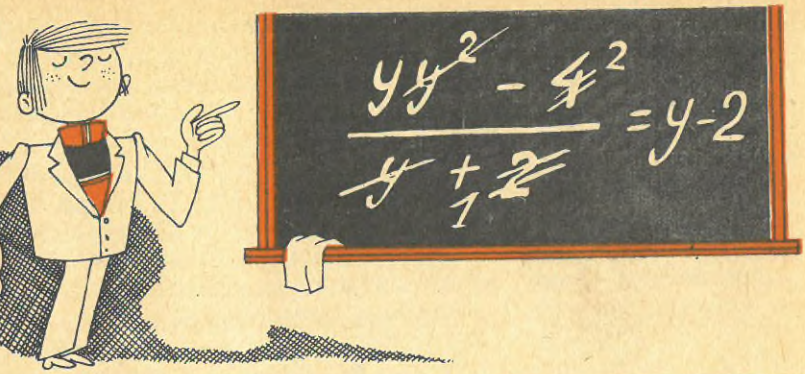
1) Кто из двух верно решил задачу? 2) Найти допущенные ошибки.

409. Решая уравнение $ax^2+c=0$, ученик нашел его корни $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. При подстановке же первого корня в данное уравнение у него получилось следующее:

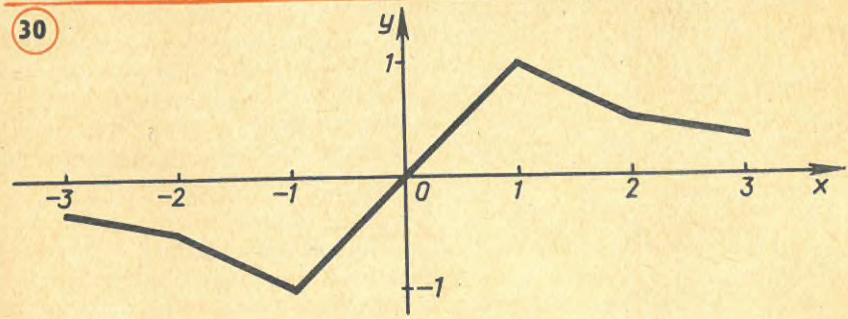
$a\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2+c=a\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2}+c=a\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}+c=\frac{ac}{a}+c=c+c\neq 0$ при $c\neq 0$. Значит, $x=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ не является корнем уравнения $ax^2+c=0$. Совершенно аналогично проверял ученик и второй корень уравнения. Найти ошибки, допущенные учеником.

410. Ученица так выполнила «доказательство» тож-

29



30



деcтва $a^{-k}=\frac{1}{a^k}$, $k\in N$: $\frac{1}{a^k}=\frac{a^0}{a^k}=a^{0-k}=a^{-k}$. Какую ошибку она допустила?

411. Один ученик рассуждал так: «Известно, что если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то такой параллелограмм — ромб. Нам дан параллелограмм, диагонали которого не являются взаимно перпендикулярными. Следовательно, этот параллелограмм не ромб». В чем ошибка?

412. Витю заинтересовала аксиома параллельных прямых: через точку A, лежащую вне прямой a, в плоскости, определяемой этими точкой и прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной a. «Одну прямую можно провести, — подумал он. — Это доказать легко». Через точку A проведем прямую b, перпендикулярную к a, и через A прямую c, перпендикулярную к b, a и c параллельны. Но из моих рассуждений следует, что такая прямая и единственна. В самом деле, перпендикуляр, проведенный через A к a, единствен. Далее, перпендикуляр, проходящий через A к b, тоже единствен. Значит, через A проходит единственная прямая, параллельная a. В чем ошибка?

413. Пассажир, едущий в поезде, захотел узнать скорость поезда. Для этого он подошел к окну вагона, заметил по своим

часам время, когда против окна показался телеграфный столб, и, начиная с него, стал считать столбы один за другим. При появлении 24-го столба против окна пассажир опять заметил время. Оказалось, что прошло 2 мин. Зная, что расстояние между столбами 50 м, пассажир сделал вывод: скорость поезда равна 36 км/ч. Какую ошибку допустил пассажир?

414. Известна задача: «Из какой точки земной поверхности нужно выйти, чтобы, пройдя 10 км по меридиану к югу, затем 10 км по параллели к востоку, наконец, снова 10 км по меридиану к северу, вернуться в точку отправления?»

Прежде чем читать дальше, попытайтесь решить эту задачу. Решили? А сейчас познакомьтесь с рассуждениями, которые часто проводятся для решения этой задачи. «Первая и третья части пути проходят по меридианам, но два меридиана имеют только две общие точки: северный полюс и южный. Из южного полюса двигаться на юг нельзя, поэтому он отпадает. Остается единственная возможность — начать движение с северного полюса. Задача имеет единственное решение». Не сможете ли вы обнаружить в этом рассуждении ошибку? Единственное ли решение имеет предложенная задача?

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА ПЛАНИРОВАНИЕ

415. Требуется поджарить 3 ломтика хлеба. На сковороде умещаются лишь два ломтика. На поджаривание ломтика с одной стороны требуется 1 мин. За какое кратчайшее время можно поджарить с двух сторон все 3 ломтика? (Время на перевертывание и перекладывание ломтиков можно в расчет не принимать.)

416. Исследователю-путешественнику необходимо совершить шестидневный переход через бесплодную пустыню. Сам путешественник и сопровождающий его носильщик могут взять с собой каждый лишь четырехдневный запас пищи и воды для одного человека. Какое наименьшее число носильщиков потребуется для этого перехода?

417. Имеются неверные (неравноплечие) чашечные весы. Пользуясь ими, весовщик должен определить массу некоторого груза. Может ли весовщик достаточно точно найти массу этого груза с помощью двух измерений: кладя сначала груз на одну чашку весов и гири на другую, а затем груз на вторую чашку и гири на первую? (Массой чашек по сравнению с массой груза можно пренебречь.)

418. Чтобы отвесить 2 кг крупы на неверных чашечных весах, хозяйка поступила так: сначала гирю в 1 кг она положила на одну чашку весов и отвесила крупу, затем эту гирю положила на другую чашку и отвесила крупу. Ссыпав вместе отвешенную крупу, она решила, что масса ее в точности равна 2 кг. Так ли это?

419. Шины на задних колесах грузовика изнашиваются после 25 000 км пробега, а на передних — после 15 000 км. Сколько километров может пройти грузовик без замены шин, если в нужный момент поменять местами передние и задние шины? Когда нужно произвести смену шин?

420. В селении A живут 300 школьников, в селении B — 200 и в C — 100. Расстояние между селениями таковы: $|AB| = 4$ км, $|BC| = 3$ км, $|AC| = 5$ км. Где надо построить школу, чтобы общее число километров, проходимых всеми школьниками, было наименьшим?

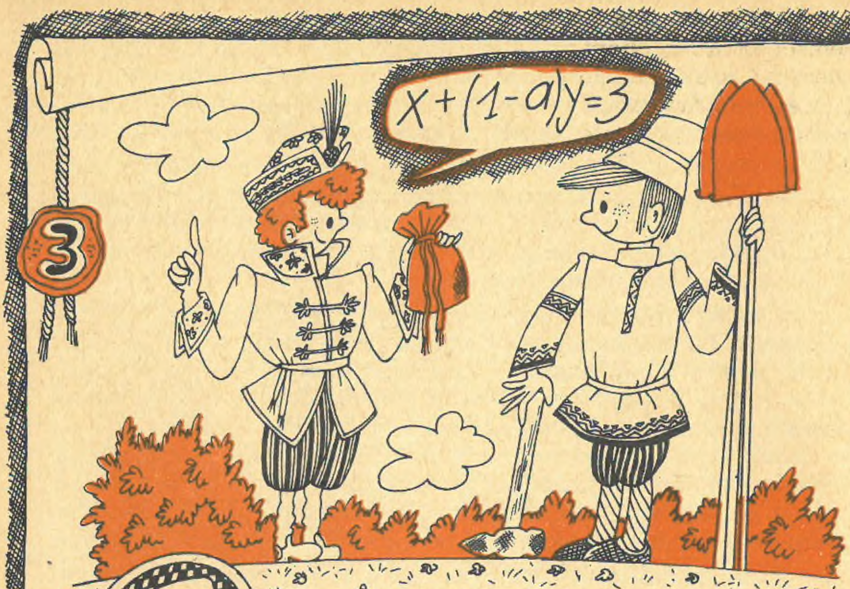
421. Три промышленных предприятия расположены в пунктах A, B и C, являющихся вершинами треугольника ABC. Стороны этого треугольника удовлетворяют неравенствам: $|BC| > |AC| > |AB|$. Квартиры рабочих этих предприятий находятся в пункте O, равноудаленном от сторон этого треугольника. Любые два из пунктов A, B, C и O соединены прямолинейными шоссе. Рабочих развозит автобус. Отбыв из O, он доставляет их в A, C, B и возвращается в O, двигаясь по упомянутым шоссейным дорогам. Найдите кратчайший маршрут автобуса.

422. Типографии поручили набрать и напечатать 3 книги: A, B и C. В распоряжении имеются два автомата: один для набора, другой для печатания. На набор текста каждой книги уходит 3 ч. На печатание книги A нужно 2 ч, книги B — 4 ч и книги C — 1 ч. Как следует организовать работу, чтобы закончить изготовление книг возможно скорее?

423. На втулку диаметром 30 мм требуется намотать пружинную ленту толщиной 0,25 мм так, чтобы общий диаметр втулки с намотанной на нее лентой был равен 130 мм. Какой длины должна быть лента?

424. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей, которые для пересылки упаковываются в ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, второго типа — 40 деталей, третьего типа — 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого, второго и третьего типов равна соответственно 20, 10 и 7 р. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

425. Предполагается использовать 2000 р. на путевки в дома отдыха. Путевки имеются на 15, 27 и 45 дней, стоимость их соответственно 21, 40 и 60 р. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим?



АЛГЕБРА

Историческая задача алгебры заключается в том, что она служила и служит колыбелью для вновь возникающих идей и методов, которые впоследствии проникают в другие отделы математики и нередко начинают играть в них доминирующую роль.

Н. Г. Чеботарев

ВОСПОЛЬЗУЙТЕСЬ УРАВНЕНИЯМИ*

426. Для экскурсии нужно было собрать определенную сумму денег. Если каждый участник экскурсии внесет по 7 р. 50 к., то на расходы не хватит 44 р., а если же каждый внесет по 8 р., то останется 44 р. Сколько всего было экскурсантов?

---

* Некоторые из предложенных здесь задач могут быть решены и без составления уравнений.

427. У мальчика столько сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько братьев и сколько сестер в этой семье?

428. Некий человек нанял работника на год, обещал ему дати 12 р. и кафтан, но тот, проработав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойные платы с кафтаном; он же даде ему по достоинству расчет 5 р. и кафтан, и ведательно есть, коликой цены оный кафтан был. (Магницкий.)

429. Автобус выполнял рейс между двумя городами: от A до B со скоростью 60 км/ч, а от B до A со скоростью 40 км/ч. Какова была средняя скорость рейса?

430. Летели галки и сели на ветки. Если на каждую ветку сядет по галке, то одной галке не хватит ветки, а если на каждую ветку сядут по две галки, то одна ветка останется без галок. Сколько было веток и сколько галок?

Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ
(1894—1947)

«...Чтобы каждая задача могла считаться решенной, необходимо... по крайней мере, точно формулировать сущность задачи, ей обратной».

431. На памятнике древнегреческому математику Диофанту имеется надпись: «Прохожий! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в старости. Шестую часть его жизни заняло детство, двенадцатую — отрочество, седьмую — юность. Затем протекла половина его жизни, после чего он женился. Через 5 лет у него родился сын, а когда сыну минуло 4 года, Диофант скончался». Сколько лет жил Диофант?

432. У четырех братьев 45 р. Если деньги первого увеличить на 2 р., деньги второго уменьшить на 2 р., у третьего увеличить вдвое, а у четвертого уменьшить вдвое, то у всех денег окажется поровну. Сколько денег было у каждого?

433. Из множества чистейших цветков лотоса третья была принесена в дар Шиве, пятая — Вишну, шестая часть — Солнцу. Одну четвертую часть всех цветков получил Бхавани, а оставшиеся шесть цветков были даны высокочтимому учителю. Скажи, сколько было цветков лотоса. (Индусская задача.)

434. Из некоего роя пчел одна третья опустилась на цветы кадамба, одна пятая — на цветы шилиндха. Утроенная разность этих двух чисел полетела, чтобы сесть на цветы кутайи, и осталась одна пчела, которая носилась в воздухе, привлекаемая одновременно очаровательным благоуханием жасмина и панданууса. Скажи, сколько было пчел? (Индусская задача.)

435. Отец сказал сыну: «10 лет тому назад я был в 10 раз старше тебя, а через 22 года я буду только в два раза старше тебя». Сколько лет теперь отцу и сколько сыну?

436. Марии 24 года. Она вдвое старше, чем была Анна тогда, когда Марии было столько лет, сколько теперь Анне. Сколько лет Анне?

437. В 12 ч дня часовая и минутная стрелки часов совпадают. Через сколько минут после этого они снова совпадут?

438. Через сколько минут после того, как часы показывали 4 ч, минутная стрелка догонит часовую стрелку?

439. Представим себе состязание в беге между быстроногим Ахиллесом (героем древнегреческих мифов) и черепахой. Пусть вначале расстояние между ними 1 км, и они перемещаются в одном направлении по прямой так, что Ахиллес догоняет черепаху. Скорость бега Ахиллеса в 10 раз больше скорости движения черепахи. Как будто бы Ахиллесу не догнать черепаху, так как пока Ахиллес пробежит 1 км, черепаха продвинется вперед на 100 м; когда Ахиллес пробежит эти 100 м, черепаха продвинется вперед на 10 м; пока Ахиллес пробежит эти 10 м, черепаха продвинется вперед на 1 м и так без конца — черепаха все время будет впереди Ахиллеса. Подсчитайте, какой путь пробежит Ахиллес, чтобы догнать черепаху?

440. Мне было задано пятизначное число. К этому числу нужно было прибавить 200 000 и сумму умножить на 3. Вместо этого я приписал к заданному мне числу в конце его справа цифру 2 и получил правильный результат. Какое число было мне задано?

441. Решая некоторую задачу, один ученик должен был данное ему число умножить на 0,5 и к тому, что получится, прибавить 3. Вместо этого ученик по случайности данное число разделил на 0,5 и от получившегося частного отнял 3. Результат получился такой, какой и должен был получиться. Найдите то число, которое ученик должен был умножить.

442. Предложи товарищу задумать число. Чтобы угадать, какое число он задумает, попроси его удвоить задуманное число, прибавить к результату 4, разделить то, что получится, на 2, к частному прибавить 7, результат умножить на 8, вычесть из произведения 12, разделить разность на 4 и, наконец, вычесть 11. Пусть товарищ скажет, какое число у него получилось. Как по результату вычислений твоего товарища узнать, какое число он задумал?

443. Задумай какое-нибудь трехзначное число, отбрось последнюю цифру его, затем отбрось последнюю цифру получившегося числа, сложи три эти числа, сумму умножь на 9, прибавь к произведению сумму цифр задуманного числа и результат раздели на 10. У тебя получится задуманное число. Почему?

444. Несколько пионеров собирали макулатуру. Каждый мальчик собрал по 21 кг, а каждая девочка — по 15 кг. Всего пионеры собрали 174 кг макулатуры. Сколько мальчиков и сколько девочек собирали макулатуру?

445. Нужно разменять 100 р. денежными знаками достоинством в 3, 5 и 25 р. так, чтобы всего было 20 денежных знаков. Как это можно сделать?

446. Куплены тетради по 7 к. и по 4 к. за тетрадь, всего на сумму 53 коп. Сколько куплено тех и других тетрадей?

447. Пункты A и B расположены на берегу реки. Из A в B одновременно отправились пешеход по берегу реки и лодка по реке. Собственная скорость лодки (в стоячей воде) равна скорости пешехода. Достигнув B, пешеход и лодка сразу же поворачивают обратно и возвращаются в A. Кто из них раньше окажется в A?

448. Несколько девочек (все разного возраста) ходили в лес по грибы. Собранные ими грибы они решили разделить поровну. Самой младшей дали 20 грибов и еще 0,04 остатка. Следующей за ней по возрасту дали 21 гриб и еще 0,04 остатка. Третьей — 22 гриба и 0,04 остатка и так далее. Сколько было девочек? Сколько грибов получила каждая?

449. Теплоход прошел 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 ч. Какова собственная скорость теплохода, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

450. Как далеко мог видеть горизонт первый летчик-космонавт Ю. А. Гагарин, находясь на высоте 250 км над поверхностью Земли? (Считать Землю шаром диаметром $\approx 12\,800$ км, а расстояние от корабля-спутника до горизонта — отрезком касательной.)

451. От листа железа квадратной формы отрезали полосу шириной 25 см. Вычислить первоначальные размеры листа, если площадь оставшейся части оказалась равной 4400 см^2.

452. Как известно, свободно падающее тело проходит в первую секунду примерно 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. 1) Какое расстояние проходит тело за первые 12 с? 2) Вычислить время падения тела с высоты 1980 м.

453. Начальник цеха пригласил на совещание несколько человек. Каждый участник совещания, входя в кабинет начальника цеха, обменивался рукопожатием со всеми присутствующими. Сколько было участников совещания, если было зафиксировано 78 рукопожатий?

454. Амфитеатр, состоящий из n рядов, в нижнем ряду имеет a мест, а в верхнем — b мест. Сколько зрителей может вместить амфитеатр, если каждый следующий ряд имеет на одно и то же число мест больше предыдущего?

455. За одно качание воздушный насос откачивает из резервуара 0,1 воздуха. Сколько процентов воздуха останется после 5 качаний?

456. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. 70 коров могут поесть ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?

457. Сумма номеров домов по одной стороне квартала равна 333. Требуется узнать номер пятого дома от угла квартала.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

458. Решите уравнение $x+(1-a)y=3$, принимая за неизвестное a $(y \neq 0)$.

459. Решите уравнение: 1) $3x=2(x-3)+x+4$; 2) $3x=2(x-3)+x+6$; 3) $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{(x+2)(x+3)}$; 4) $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$; 5) $\frac{2}{x-3}=\frac{5}{x-3}$.

460. Применяя разложение на множители, найдите действительные корни следующих уравнений:

1) $x^3-x^2+x-1=0$;
2) $x^3+x^2+x+1=0$;
3) $3x^3-2x^2+21x-14=0$;
4) $x^3+7x^2+3x+21=0$;
5) $z^4+2z^3+2z^2+2z+1=0$;
6) $y^3-13y-12=0$;
7) $u^5+u^4+2u^3+2u^2+u+1=0$;
8) $3x^3-7x^2-7x+3=0$;
9) $k^3-12k^2+36k-27=0$;
10) $z^3-2z^2+3z-2=0$.

461. Решите (устно) уравнения: 1) $x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{3}$; 2) $x+\frac{1}{x}=5{,}2$; 3) $x^2+1=2\frac{1}{2}x$; 4) $x+1+\frac{1}{x+1}=4{,}25$.

462 Решите уравнения:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$; 2) $3-\sqrt{x+5}=6$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$;

4) $\sqrt{(x+5)(x-4)}+\sqrt{x-4}=0$;

5) $\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{x-3}=0$;

6) $\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}=0$;

7) $\sqrt{(3x-5)^2}+\sqrt{(2-0{,}2x)^2}=2$.

463. Решите уравнения:

1) $|x|=\frac{x}{2}+2$; 2) $|x+2|-|3-x|=2x-5$.

464. Решите уравнения:

1) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$;

2) $(x^2+6x-4)(x^2+6x-3)=12$.

465. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y-3z=3, \\ 2x-3y-5z=2, \\ x-4y-2z=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-3z=1, \\ 2x-3y-5z=3, \\ x-4y-2z=2. \end{cases}$

466. Составьте систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными: 1) не имеющую решений, 2) имеющую бесконечно много решений, 3) имеющую единственное решение: $x=2$, $y=-3$, $z=-1$.

467. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x-3|y|=1, \\ |x|+2y=4. \end{cases}$

468. Решите неравенства:
1) $x^2+1>x^2$; 2) $x^2+1<x^2$; 3) $\frac{x-1}{1-x}>0$; 4) $\frac{x-2}{2-x}<0$.

469. Что больше: a или $2a$?

470. Чему равна разность $|a|-a$?

471. Чему равна сумма $|a|+a$?

472. Чему равна дробь $\frac{a+|a|}{2}$?

473. Для каких чисел x и y верны равенства: 1) $x+y=x$; 2) $x+y=x-y$?

474. Что больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

475. Решите неравенства: 1) $|x-3|<|x-2|$; 2) $\left|\frac{x}{2}-1\right|+|x|>3$.

476. Решите неравенства:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>0$; 2) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-3}>0$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}\geqslant 0$; 4) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-3}\leqslant 0$.

477. Для следующих уравнений найдите все корни, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$:
1) $|x|=[x]$; 2) $|x|=\{x\}$; 3) $[x]=\{x\}$.

Указание: $[x]$ — целая часть x — наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}$ — дробная часть числа x; $x=[x]+\{x\}$.

478. Решите уравнения:

1) $\lg\sqrt{x}=-1$;

2) $\lg[x]=0$; 3) $\lg=[x]=1$;

4) $\lg\{x\}=1$; 5) $\lg\{x\}=0$.

479. Решите графически уравнения:

1) $3^x = x^3$; 2) $(0,5)^x = x^2 + 2x + 1$; 3) $10^x = 1 - x$.

480. Решите графически системы уравнений:

1) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 4, \\ y = 2^{-x}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = |x|, \\ 3^x + y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \{x\}. \\ y = 3^{-x}. \end{cases}$

481. Решите графически неравенства или их системы:

1) $2^x > 2$; 2) $\sqrt{x} > 2^x$; 3) $|x| \geqslant 5^{-x}$;

4) $\begin{cases} x^2 - y^2 > 0, \\ y \geqslant |x|. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 0, \\ y \geqslant x^3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ y \geqslant 1. \end{cases}$

ВЫЧИСЛИТЕ

482. Найдите простой прием вычисления:

1) $\left(2\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot 9$; 2) $\left(3\frac{2}{5} + \frac{4}{7}\right) \cdot 70$;

3) $7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2}$; 4) $11\frac{3}{4} \cdot 12\frac{1}{4}$; 5) $98^2 - 4$;

6) $\frac{17^2 - 15^2}{32}$; 7) $\frac{106}{47} - \frac{94}{53}$; 8) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

483. Найдите числовое значение выражения возможно быстрее:

1) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ при $a = \frac{17}{37}$, $b = -2\frac{3}{17}$;

2) $a^2(a + b^2)(a^4 - b^{10})(a^2 - b)$ при $a = 5$ и $b = 25$;

3) $\frac{m^2(m + n^2)(m^3 - n^6)(m^2 - n)}{m^2 + n^2}$ при $m = 4$ и $n = 16$;

4) $x^2 - 86x + 113$ при $x = 87$.

484. Найдите числовое значение выражения $\frac{a^2b + ab^2}{ab + b^2}$ при:

1) $a = 2\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{7}$; 2) $a = 15,2$, $b = 12,3$; 3) $a = -5$, $b = 5$.

485. Упростите устно: $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2$.

486. Упростите выражение

$$\frac{1}{1-a} + \frac{4}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}}$$

и найдите числовое значение его при $a = 2$.

487. Найдите наиболее простой способ вычисления:

1) $\sqrt{34 \cdot 8 \cdot 17}$; 2) $\sqrt{39 \cdot 27 \cdot 52}$; 3) $\sqrt{22 \cdot 11 \cdot 54 \cdot 48}$;

4) $\sqrt{82^2 - 18^2}$; 5) $\sqrt{(134{,}5)^2 - (34{,}5)^2}$.

488. Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}301$, $\lg 3 \approx 0{,}477$, $\lg 5 \approx 0{,}699$, $\lg 7 \approx 0{,}815$.
Вычислите следующие логарифмы:

1) $\lg 6$; 2) $\lg 15$; 3) $\lg 8$; 4) $\lg 0{,}2$; 5) $\lg \frac{2}{7}$; 6) $\lg 0{,}75$.

489. Запишите наименьшее натуральное число, половина и треть которого были бы соответственно квадратом и кубом некоторых натуральных чисел.

490. Выразите формулой объем прямоугольного параллелепипеда через площади трех различных его граней: S_1, S_2, S_3.

491. Найдите простой способ вычисления суммы:

1) $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$;

2) $s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63}$;

3) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

492. У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по семи мер зерна. Сколько мер зерна сохраняется благодаря этим кошкам? (Египетский папирус — около 2000 лет до н. э.)

493. Некто хотел подковать свою лошадь и обратился к кузнецу с просьбой взять с него подешевле. Кузнец предложил: «Заплати мне только за гвозди, которых я затрачу 24 штуки. За первый гвоздь заплати мне $\frac{1}{4}$ к., за второй — $\frac{1}{2}$ к., за третий — 1 к. и т. д., все время удваивая плату за каждый следующий гвоздь». Сколько бы пришлось заплатить при таком способе расчета только за последний гвоздь? (Старинная задача.)

494. Некто продает свою лошадь по числу подковных гвоздей, которых у нее 16. За первый гвоздь он просит 1 к., за второй — 2, за третий — 4, за четвертый — 8 и всегда за каждый следующий вдвое больше, чем за предыдущий. Спрашивается, во сколько он ценит лошадь.

СООБРАЗИТЕ!

495. Как записать в общем виде натуральное число, при делении которого на 5 получается остаток 7?

496. О натуральных числах p и q известно, что $p < q$. Как на числовой прямой располагаются точки $\frac{p}{q}$ и $\frac{q}{p}$? Какая из двух последних точек ближе к точке, изображающей 1?

497. Найдите наименьшее значение выражения $4x^2 - 12x + 10$.

498. При каком значении x дробь $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ будет иметь наименьшее значение?

499. Самолет из Москвы летит в Киев и возвращается обратно в Москву. В какую погоду этот самолет проделает весь путь быстрее: в безветренную; при ветре, дующем с одинаковой силой в направлении Москва — Киев?

500. Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 50 км/ч, а обратно возвращается со скоростью 30 км/ч. Какова была его средняя скорость?

501. Упростите выражение $80(81^9 + 81^8 + 81^7 + \ldots + 81^2 + 82) + 1$.

502. Найдите положительные корни уравнения $x^x + x^{1-x} = x + 1$.

503. Из разговора 1 сентября: «Сколько тебе еще учиться?» — «Столько, сколько ты уже проучился. А тебе?» — «В полтора раза больше». Кто в какой класс перешел?

504. В записи КТС + КСТ = ТСК каждой букве соответствует своя цифра. Найдите, чему равно число ТСК!

ДОКАЖИТЕ

505. Квадрат нечетного числа — нечетное число.

506. Если квадрат некоторого числа является числом четным, то и само это число — четное.

507. Квадрат четного числа является числом, кратным 4.

508. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом.

509. Разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

510. Сумма кубов любых трех последовательных натуральных чисел кратна 9.

511. Сумма произведения двух последовательных натуральных чисел и большего из них равна квадрату этого большего числа.

512. Произведение двух последовательных четных чисел есть число, кратное 8.

513. Если взять какое-нибудь двузначное число с разными цифрами, переставить в нем цифры и вычесть из взятого числа получившееся, то разность будет делиться на 9. Будет ли это верно для трехзначных чисел (переставляются крайние цифры)?

514. Сумма первых n нечетных чисел равна n^2.

515. Чтобы двузначное число, оканчивающееся цифрой 5, возвести в квадрат, можно поступить так: число десятков нужно умножить на число, которое на 1 больше числа десятков, и к получившемуся произведению приписать 25. Так, $75^2 = 5625$. Докажите, что это правило верно. Можно ли применить его для трехзначных чисел? Вычислите: 35^2, 55^2, 65^2, 85^2, 125^2.

516. Произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

517. На какие числа делится произведение любых трех последовательных натуральных чисел, сумма которых — нечетное число?

518. Число $m^3 - m$ при любом натуральном m делится на 6.

519. Число $m^2 - 1$ при m нечетном делится на 8.

520. $p^2 - 1$, где p — простое число, большее 3, делится на 24.

521. $n^5 - n$ делится на 30 при любом натуральном n.

522. Если целое число a не делится на 5, то $a^4 - 1$ делится на 5.

523. Разность между кубом любого нечетного числа и самим этим числом делится на 24.

524. $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^n$ делится на 400 при любом натуральном n.

525. Найдите число, обладающее следующим свойством: если зачеркнуть последнюю цифру его, то получится число в 14 раз меньше.

526. Число $a^8 + b^8 + c^8$ не оканчивается цифрой 9 ни при каких натуральных значениях a, b и c.

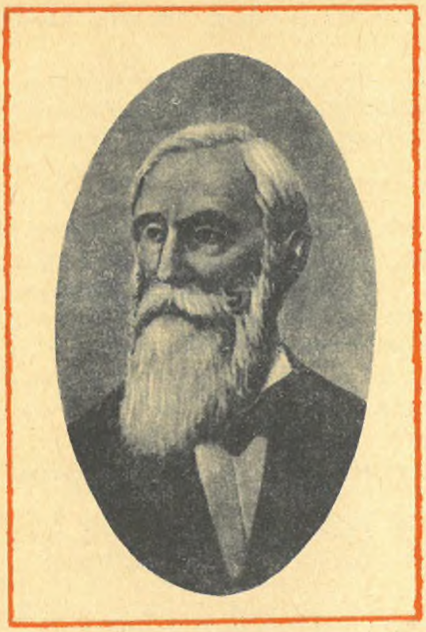
527. Произведение нескольких чисел вида $4n + 1$ является числом того же вида. Почему достаточно рассмотреть произведение двух чисел этого вида?

528. Всякое число вида $n^4 + 4$, где n — натуральное число и $n > 1$, является составным*.

529. Если каждое из двух данных чисел является суммой двух квадратов, то и произведение этих чисел может быть представлено в виде суммы двух квадратов.

---

* Это утверждение часто называют теоремой Софьи Жермен. С. Жермен (1776—1831) — французская женщина-математик.



П. Л. ЧЕБЫШЕВ
(1821—1894)
«Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает».

530. Числа вида 121, 12321, 1234321, ..., 123...n...321 ($n \leqslant 9$) — полные квадраты.

531. Сумма квадратов 5 последовательных натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа.

532. Любое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух чисел.

533. Любое натуральное число, кратное 4, можно представить в виде разности квадратов двух чисел.

534. Двучлен $2a^2 + 2b^2$ можно представить в виде суммы квадратов двух двучленов.

535. Многочлен $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ можно представить в виде суммы квадратов трех выражений.

536. Двучлен $3a^4 + 1$ можно представить в виде суммы квадратов трех двучленов.

537. Если сумма двух целых чисел — число, оканчивающееся нулем, то квадраты этих чисел оканчиваются одной и той же цифрой.

538. Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев доказал, что между двумя натуральными числами n и $2n$ (при $n > 1$) имеется по крайней мере одно простое число. Воспользовавшись этим результатом, докажите, что простых чисел бесконечно много.

539. При любом натуральном n имеет место тождество:

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 1 \cdot n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + \ldots + n \cdot 1.$$

540. Прямоугольный треугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами, называется пифагоровым. Например, прямоугольный треугольник со сторонами в 3, 4 и 5 единиц длины — пифагоров. Вы, наверное, знаете, что для прямоугольных треугольников сумма квадратов чисел, выражающих длины катетов, равна квадрату числа, выражающего длину гипотенузы (теорема Пифагора). 1) Докажите, что пифагоровых треугольников бесконечно много. 2) Докажите, что если треугольник ABC — пифагоров, то существует бесконечно много подобных ему пифагоровых треугольников. 3) Докажите, что среди всех подобных пифагоровых треугольников существует наименьший (с наименьшими длинами сторон при выбранной единице длины).

541. Докажите тождества:

1) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$;

2) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b+2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\dfrac{1}{3a^2-b^2}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)=-1$

при $0<x<1$.

542. Докажите, что из 50 любых натуральных чисел всегда можно взять несколько (быть может, и одно из них), сумма которых делится на 50.

543. Докажите, что $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}<0{,}01$.

544. Докажите неравенства:

1) $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и $c\geqslant 0$;

2) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$;

3) $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$ при любых действительных x, y и z;

4) $x^2-2xy+2y^2-2x+3>0$ при любых действительных x и y;

5) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geqslant 6abc$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$;

6) $\dfrac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

545. Докажите, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<0{,}99$.

546. Может ли n-значное натуральное число при зачеркивании его первой (слева) цифры уменьшиться в 1979 раз?

ЗАДАЧИ НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ

547. При переписывании примера ученик забыл поставить скобки. Выполненная им запись оказалась такой: $20:5\cdot 2+6^2$. Восстановите скобки, если ответом примера должно быть число: 1) 38; 2) 196; 3) 152; 4) 111.

548. Восстановите недостающие члены в следующем тождестве:

$(?-2b)(?+?)=9a^2-?$.

549. Восстановите недостающие множители в разложении:

1) $ac^2+4a^3c^3-a^2c=ac(...)$;

2) $32p^3q^2-16p^2q^3+1{,}6pq^2=...(40p^2-20pq+2)$.

550. Восстановите обозначенные звездочками числа так, чтобы получить тождества:

1) $(3a^2+2ab^*)(2a^2b^*+3a^*)=6a^4b+4a^5b^3+9a^5+6a^4b^2$;

2) $(2x^3-1)(x^*+*)=2x^5+5x^3-x^2-2{,}5$;

3) $(3x^*+*x)(3x^*-*x)=9x^6-4x^2$.

551. В произведении $(2x+4x^2-8)(32x^5-4x^2+A)$ восстановить значение коэффициента A, если после раскрытия скобок и приведения подобных членов свободный член многочлена должен быть равен -28.

552. Восстановите коэффициент β в произведении $(a^2-\beta a+$ $+2a^3)\cdot(0{,}1a-\frac{1}{4}a^2+25a^3)$, если после раскрытия скобок коэффициент при a^3 равен 1,8.

553. Многочлены можно было разложить на множители способом группировки, но последнее слагаемое в каждом из них забыли записать. Восстановите эти слагаемые:

1) $ab+ac+bx...$; 2) $mn+mp-kn...$;

3) $am+m-an...$; 4) $x^2-xy-xz...$.

554. Из двузначного числа, умноженного на однозначное, вычли однозначное и получили 1. Какие это были числа?

555. В какой системе счисления выполнено вычитание: $236-145=61$?

556. Задумано пятизначное число, являющееся кубом натурального числа. Восстановите задуманное число, если известно, что оно должно делиться на 3 и последняя цифра его 6.

557. Первая слева цифра шестизначного числа — 1. Если ее перенести с первого места в конец числа, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Восстановите первоначальное число.

558. Какое наименьшее натуральное число, делящееся на 7, при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает в остатке 1?

559. Наборщик в типографии набрал число, представляющее шестую степень натурального числа, но по неосторожности набор рассыпал. Самого набранного числа наборщик не запомнил, но по рассыпанному набору установил, из каких цифр оно состояло. Это были цифры: 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9. Какое число было набрано?

560. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 81. Восстановите эти числа.

561. Разность кубов двух последовательных натуральных чисел равна 331. Восстановите эти числа.

562. Представьте число 3400 в виде разности квадратов двух чисел.

563. Найдите двузначное положительное число, равное произведению суммы и разности его цифр.

564. Сколько существует шестизначных чисел, для которых сумма трехзначного числа, выражаемого первыми тремя цифрами, и второго, выражаемого тремя последними цифрами, меньше 1000?

565. Найдите десятизначное число, первая (высшая) цифра которого равна числу нулей в записи этого числа, вторая — числу единиц в ней, третья — числу двоек и т. д.

566. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (3; 4).

567. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки (2; 1) и (4; -3).

568. Восстановите функцию по следующему ее свойству: отношение приращения этой функции к соответствующему приращению аргумента постоянно и равно a.

569. Восстановите квадратную функцию $y = x^2 + px + q$ по вершине (-1; 2) параболы, служащей ее графиком.

570 Восстановите квадратную функцию (найдите задающую ее формулу) по координатам вершины параболы (2; 4) и координатам принадлежащей графику точки (3; 6).

571. Восстановите основание логарифмической функции, если известно, что ее график проходит через точку A (8; 3).

572. При каких значениях параметра k уравнение $2kx + 5 = 3x + k$ имеет корни, большие чем 2?

573. При каких значениях параметра q уравнение $3x + q = qx + 7$ имеет корень, больший 1?

574. Восстановите числовые значения k в уравнении $2kx^2 - 2x - 3k - 2 = 0$, при которых один корень уравнения равен 0.

575. Дано уравнение $(k-2)x^2 + 2(k-1)x + k - 3 = 0$. При каких значениях k уравнение: 1) имеет два равных корня; 2) не имеет действительных корней?

576. При каких значениях k уравнение $|x+1| - |x-1| = kx + 1$ имеет единственный корень?

577. Восстановите квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ по трем точкам его графика: 1) (1; 0), (-1; -2), (-2; 0); 2) (0; 2), (1; 2), (2; 2).

578. Восстановите многочлен третьей степени, если известно, что он обращается в 0 при $x = -1$, а при делении на $x - 1$, $x + 2$ и $x + 3$ дает каждый раз один и тот же остаток 8.

579. Какой многочлен при возведении в третью степень дает многочлен $x^6 + 9x^5 + 30x^4 + 45x^3 + 30x^2 + 9x + 1$?

580. Дано уравнение $2x - y = 1$. Составьте второе уравне-

ние так, чтобы система двух этих уравнений: 1) имела только одно решение; 2) более одного решения; 3) не имела решений.

581. Составьте две системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными так, чтобы: 1) первая система имела единственное решение и точка пересечения графиков уравнений лежала бы в третьей четверти; 2) одному из уравнений второй системы удовлетворяли бы координаты любой точки плоскости, а другому — координаты точек (1; —3) и (5; 5).

582. Сосуд, емкость и масса которого неизвестны, наполняют сначала одной жидкостью, а затем другой. В первом случае масса сосуда (с наполняющей его жидкостью) оказалась равной m_1, а во втором m_2. Плотности жидкостей соответственно равны ρ_1 и ρ_2. Можно ли по этим данным вычислить массу самого сосуда и емкость его? Как это сделать?

583. Кусок сплава двух металлов имеет массу m граммов и «теряет в весе» при определении его массы в воде a граммов. Кусок одного из этих металлов массой m граммов «теряет» в воде b граммов, а такой же по массе кусок другого металла «теряет» c граммов. Сколько первого и сколько второго металлов в составе данного куска сплава?

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решение многих задач приводит к уравнениям не с одной неизвестной или к системам уравнений, в которых уравнений меньше, чем неизвестных. В таких случаях решению обычно помогают некоторые дополнительные условия, сформулированные в задаче. Часто это бывает задание — решить уравнение в целых числах (как, например, в задачах 444—446). Иногда требуется проявить сообразительность и заменить дополнительные условия, явно в задаче не сформулированные. В других случаях необычность уравнения заключается в том, что оно «плохо» решается стандартными методами, т. е. вновь нужно проявить сообразительность. Такие уравнения, системы уравнений и задачи, к ним приводящиеся, решать очень интересно. Попытайтесь решить предложенные далее уравнения и задачи, и вы убедитесь в этом.

Для облегчения вашего труда приведем решение одной такой задачи.

Задача. Какое трехзначное число равно кубу цифры его единиц?

Обозначим искомое число $\overline{abc}$. Тогда по условию задачи $100a + 10b + c = c^3$, или $10(10a + b) = (c - 1) \cdot c(c + 1)$. Получили одно уравнение с 3 неизвестными. Левая часть его (а значит, и правая) кратна 10, поэтому хотя бы один из множителей правой части делится или на 10, или на 5. (Явно не сформулированное дополнительное условие.) Но $1 \leqslant c \leqslant 9$, поэтому или

$c+1=10$, или $c=5$, или $c-1=5$. Случай $c+1=5$ отпадает, так как тогда $(5-2)(5-1)\cdot 5=60$ не является трехзначным числом ($10(10a+b)$ — число трехзначное).

Расмотрим каждый из оставшихся трех вариантов.

1) $c-1=5 \Leftrightarrow c=6 \Rightarrow \overline{abc}=216$;

2) $c=5 \Rightarrow \overline{abc}=125$;

3) $c+1=10 \Leftrightarrow c=9 \Rightarrow \overline{abc}=729$.

584. Какое трехзначное число равно кубу цифр его единиц, а также квадрату числа, составленного из его второй и первой цифр?

585. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

586. Найдите двузначное число, равное сумме числа десятков и квадрата числа единиц.

587. В трехзначном числе зачеркнули среднюю цифру. Полученное двузначное число оказалось в 6 раз меньше исходного трехзначного. Найдите такое трехзначное число.

588. Тане в 1979 г. исполнилось столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась?

589. Есть ли в вашей школе ученики, которым в этом году исполнится столько лет, какова сумма цифр их года рождения?

590. Сколько существует способов составить отрезок длиной 1 м из отрезков длиной 7 и 12 см?

591. Павел с сыном и Семен с сыном были на рыбалке. Павел поймал столько же рыб, сколько его сын Игорь, а Семен — втрое больше, чем его сын. Всего же они поймали 35 рыб. Как зовут сына Семена? Кто сколько поймал рыб?

592. При делении некоторого числа на 13 и 15 получились одинаковые частные, но при делении на 13 получился остаток 8, а деление на 15 выполнено без остатка. Найдите это число.

593. В комнате, в которой заседал совет дружины, были стулья на 4 ножках и табуретки на 3 ножках. Когда все пионеры уселись, то свободных мест не осталось, а сумма числа ног у сидящих и ножек у сидений оказалась равной 39. Сколько в комнате было стульев и сколько табуреток?

594. Из 36 счетных палочек построили треугольники, квадраты и домики (рис. 31) — всего 10 фигур. Найдите число фигур каждого вида.

595. Если первую цифру трехзначного числа увеличить на n, а вторую и третью цифру уменьшить на n, то получится число в n раз больше исходного. Найдите n и исходное число.

596. Докажите, что если a, b и $c \in Q$ и $|a+c|=|b|$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет рациональные корни.

597. Сколько слагаемых суммы $1+2+3+4+5+\ldots$ надо

4 Зак. 706. Нагибин «Математическая шкатулка».

31

взять, чтобы получить трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

598. Известно, что число a больше числа b в n раз, а сумма чисел a и b больше их разности в m раз. Найдите сумму чисел m и n, если $m \in \mathbf{N}$ и $n \in \mathbf{N}$.

599. В трех ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?

600. В трехзначном числе зачеркнули цифру сотен, затем полученное двузначное число умножили на 7 и получили вновь исходное трехзначное число. Какое это число?

601. Хозяйка купила арбуз, дыню и гранат. Если бы дыня стоила в 3 раза дороже, а гранат в 5 раз дороже, то хозяйка уплатила бы 1 р. 25 к. А если бы арбуз стоил в два раза, дыня в 2,5 раза, а гранат в 3 раза дороже, то пришлось бы заплатить 1 р. 10 к. Что дороже: арбуз или гранат?

602. Докажите, что уравнение $x^2 - 2xy = 1978$ не имеет решений в целых числах.

603. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

Решение изобразите на координатной плоскости.

604. Найдите два двузначных числа, куб одного из которых равен квадрату другого.

605. При каких значениях a и b уравнение $(x-a)^3 - (x-b)^3 = b^3 - a^3$ имеет единственное решение?

606. Решите в неотрицательных целых числах уравнение $x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + x^n + y^n + z^n = x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2} + x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}$, где $n \geqslant 1$ и $n \in \mathbf{N}$.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

607. Каким должно быть число, чтобы одна десятая процента от него была равна одной десятой?

608. 1) Когда сумма двух слагаемых меньше каждого из них? 2) Не меньше? 3) Не больше?

609. Какое натуральное число равно произведению всех его натуральных делителей?

610. Кирпич имеет массу 1,5 кг и еще полкирпича. Какова масса кирпича?

611. Какую массу имеет налим, если его масса равна сумме 750 г и массы $\frac{3}{4}$ того же налима?

612. Какая цифра стоит в конце числа, выражающего произведение $9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 21$?

613. Сколько раз нужно взять слагаемым натуральное число a, чтобы получить a^n (n — натуральное число)?

614. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в 8 раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли еще 2 ученика, и оказалось, что отсутствующих 20% от числа учеников, присутствующих в классе. Сколько всего учеников в классе?

615. На трех полках лежат 44 книги. Если 3 книги с третьей полки переложить на вторую, то на первой и третьей полках книг будет поровну, а на второй вдвое больше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке?

616. Мне сейчас в 4 раза больше лет, чем было моей сестре, когда она была моложе меня вдвое. Сколько лет сейчас каждому из нас, если через 15 лет нам вместе будет 100 лет?

617. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, то $a = b = c$.

618. Школьники Коля и Петя встретились у Пети. Коля сказал: «Разность двузначного номера моего дома и числа, образованного перестановкой его цифр, равна номеру твоего дома. В каком доме я живу?» Петя ответил, что это легкая задача, и сразу ее решил. В каких домах жили школьники?

619. Может ли выражение $\frac{k+9}{k+6}$ быть целым числом? Если да, то при каких целых значениях k?

620. Найдите нечетное четырехзначное число, две средние цифры которого образуют число в пять раз больше числа тысяч и втрое больше числа единиц этого числа.

621. Докажите, что разность $999993^{1999} - 777777^{1997}$ кратна 5.

622. Трехзначное число, две первые цифры которого оди-

наковы, а цифра единиц 5, разделили на однозначное и в остатке получили 8. Найдите делимое, делитель и частное.

623. Вычислите значение выражения $\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}$, если известно, что $10a^2-3b^2+5ab=0$ и $9a^2-b^2\neq 0$.

624. Запишите число 1 000 000 с помощью цифры 5 и знаков действий, употребляя эту цифру возможно меньше раз. А как то же число можно записать с помощью цифры 9 и знаков действий?

625. Запишите с помощью четырех двоек наибольшее число (кроме обычной десятичной записи числа допускается использование степеней).

626. Пусть a — одна из цифр, отличная от 0 и 1. Какое из чисел, записанных в форме a^{a^a} или $a^{\overline{aa}}$, будет больше?

627. Докажите, что если верно равенство $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, то или $a+b=0$, или $b+c=0$, или $a+c=0$ ($abc\neq 0$, $a+b+c\neq 0$).

628. 1) Найдите сумму: $1+11+111+1111+\ldots+1\,111\,111\,111$. А если бы в последнем слагаемом было n цифр? 2) Найдите сумму: $9+99+999+\ldots+99\,999\,999\,999$.

629. Выписаны подряд все натуральные числа от 1 до 60 (включительно). Как в получившемся числе нужно вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшиеся цифры при сближении их в обычную запись числа выразили наименьшее число? А как нужно вычеркнуть цифры, чтобы получилось наибольшее число?

630. Возьмем все натуральные числа от 1 до 1 000 000 и для каждого из них вычислим сумму его цифр. Для всех получившихся чисел снова найдем суммы их цифр. Так будем продолжать до тех пор, пока все получившиеся числа не будут однозначными. Среди миллиона получившихся чисел встретятся 1 и 2. Каких из этих чисел 1 и 2 будет больше?

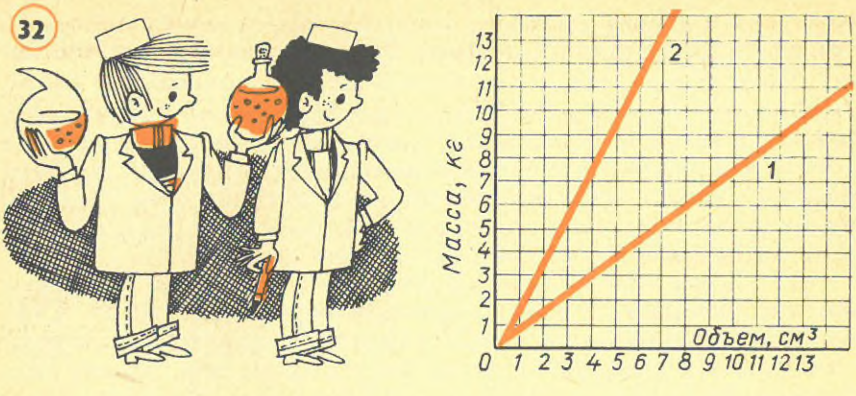
631. Возьмем все натуральные числа от 1 до 1 000 000. Подсчитайте, сколько среди них таких, которые не делятся ни на одно из чисел от 2 до 5 (включая 2 и 5).

632. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots1}_{2n \text{ цифр}}-\underbrace{222\ldots2}_{n \text{ цифр}}$ является квадратом некоторого натурального числа.

633. Сколько имеется нулей в конце числа, выражающего произведение $p_1^1(p_1^2p_2^1)(p_1^3p_2^2p_3^1)\ldots(p_1^{100}p_2^{99}p_3^{98}\ldots p_{100}^1)$, где p_1, p_2, p_3, ..., p_{100} — последовательные простые числа?

634. Замените в слове «хоккей» буквы цифрами так, чтобы было верным равенство х : о = к,кей.

32



635. Рассмотрите графики массы бензина (1) и массы серной кислоты (2) в зависимости от объема (рис. 32). Установите, используя графики: 1) какова масса 12,5 см^3 бензина, 5,4 л серной кислоты; 2) какой объем занимает 1 кг, 8 кг бензина; 1 кг, 2,5 кг серной кислоты.

636. Два велосипедиста движутся по круговому пути в одном направлении. Первый проезжает весь круговой путь за 6 мин, а второй — за 4 мин. Второй начинает движение на 3 мин позднее первого и из того же пункта, откуда начал первый. Когда второй велосипедист догонит первого? Решите эту задачу графически.

637. Из пункта C по круговому пути в противоположных направлениях выезжают два велосипедиста. Первый объезжает круг за 12 мин, а второй выезжает из C пятью минутами позже первого и объезжает круг за 10 мин. Когда велосипедисты встретятся? Решите графически.

638. Сколько раз и когда за время от 0 до 12 ч минутная стрелка совпадает с часовой? Решите графически.

639. Две свечи одинаковой длины, но разных диаметров были одновременно зажжены. Известно, что одна из них полностью сгорает за 3 ч, другая — за 5 ч. Горящие свечи три раза фотографировали. Первый раз длины оставшихся частей относились, как 2 : 3, во второй раз как 1 : 2 и в третий раз как 1 : 3. Когда производилось фотографирование? Решите графически.

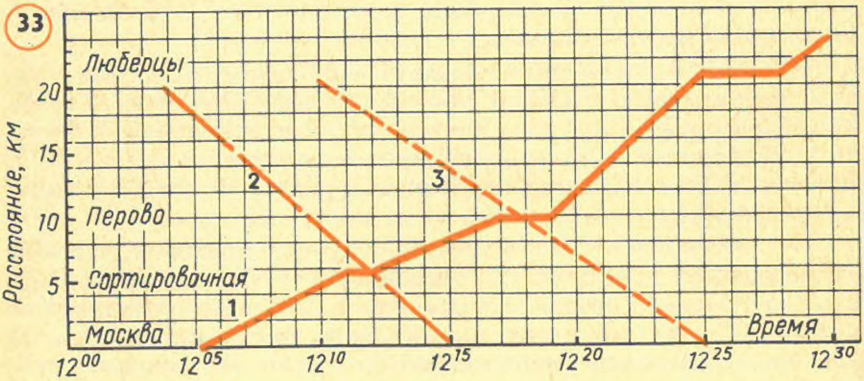
640. Рассмотрите график движения трех поездов (рис. 33). Ответьте по графику на следующие вопросы: 1) Когда прибывает поезд № 1 на станцию Перово и долго ли он стоит на этой станции? 2) Где и когда встречаются поезда № 1 и № 2? 3) На каком участке пути скорость поезда № 1 наибольшая? Вычислите ее. 4) Какой из двух поездов, № 2 или № 3, движется с большей скоростью? 5) Сколько минут идет поезд № 1 от станции Сортировочная до станции Люберцы?

641. На одном научном конгрессе математиков во время завтрака присутствующим была предложена следующая задача. Представьте себе, что каждый день в полдень из Гавра (Франция) в Нью-Йорк (США) отправляется почтовый пароход и в то же время из Нью-Йорка отходит идущий в Гавр пароход той же компании. Каждый из этих пароходов находится в пути ровно 7 суток, и идут они по одному и тому же пути. Сколько пароходов своей компании встретит на своем пути пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк? Решите эту задачу.

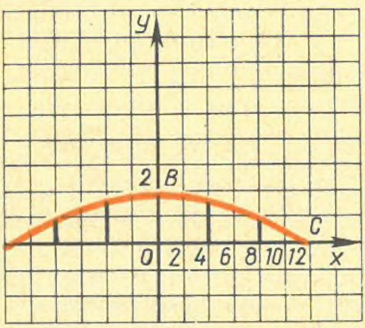
642. Арка моста имеет форму дуги параболы (рис. 34). Высота арки 2 м, а длина стягивающей ее хорды 24 м. Арка имеет 5 вертикальных стоек, укрепленных в точках хорды, делящих эту хорду на равные части. Вычислите длины этих стоек.

643. В квадрат со стороной 2 дм вписывается другой квадрат так, что вершины его лежат на сторонах данного квадрата (рис. 35). Выразите формулой площадь вписанного квадра-

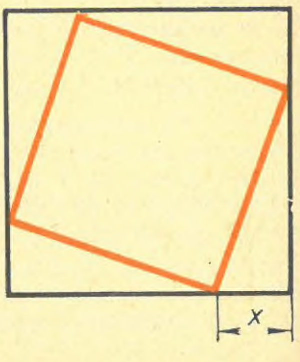
33

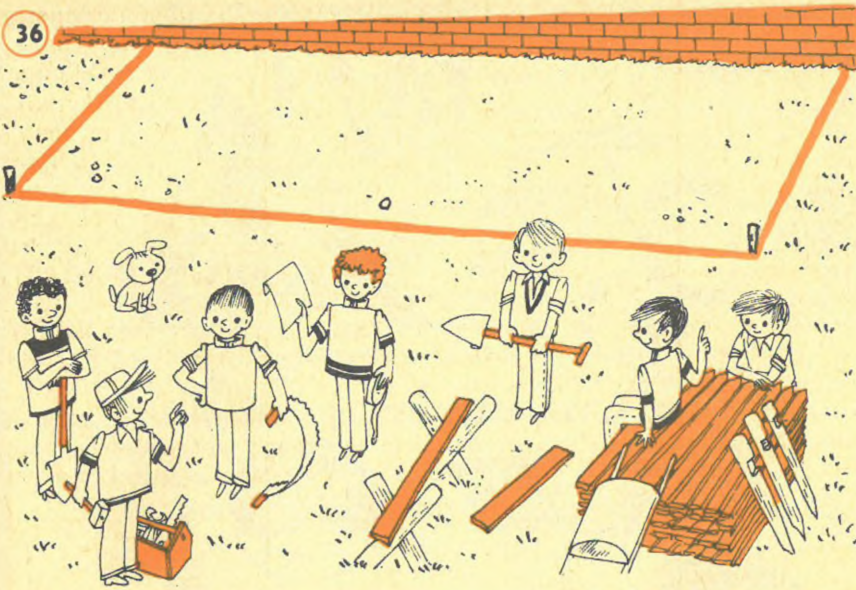


34



35

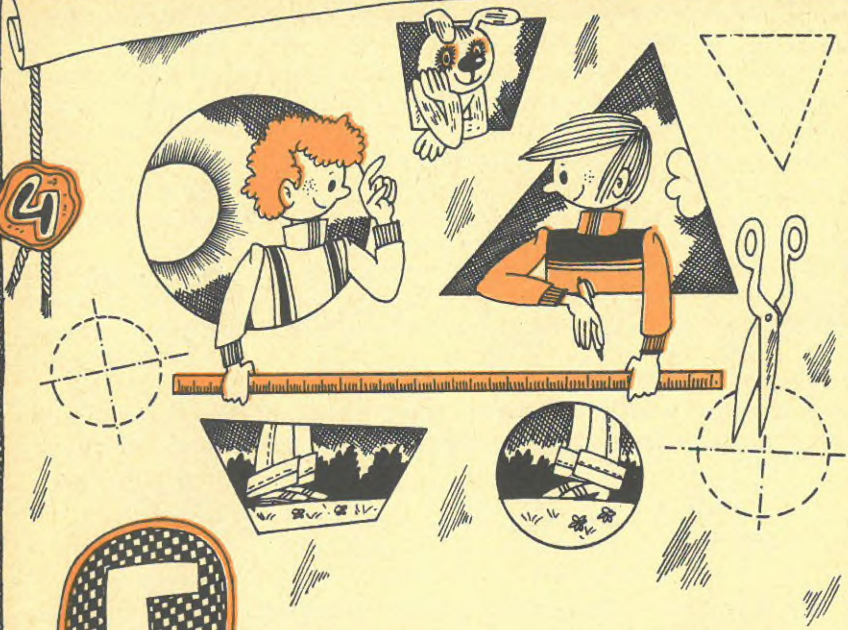




та как функцию расстояния между ближайшими вершинами данного и вписанного квадратов, а затем постройте график этой функции. Каким должно быть это расстояние, чтобы вписанный квадрат имел наименьшую площадь? А как эту задачу можно решить, не пользуясь графиком?

644. Из проволоки, длина которой 16 см, нужно согнуть прямоугольный контур, ограничивающий наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этого контура?

645. Заготовлен материал для постройки забора длиной 100 м. Требуется огородить этим забором прямоугольный участок для детской площадки. Забор этот должен примыкать к стене дома (рис. 36). Как поставить этот забор так, чтобы площадь участка была наибольшей?



ГЕОМЕТРИЯ

Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры.

Г. Галилей

ВЫЧИСЛИТЕ

646. На рисунке 37 ромбы $ABCD$, $ADEF$, $AFKL$ равны, $\angle BAL = 90°$. Какой угол образуют стороны BC и LK?

647. На рисунке 38 $ABCD$ — квадрат, $|CF| = |FD| = |AB|$. Найдите $\angle AFB$.

648. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне; острый угол, лежащий против этой диагонали, равен 40°. Найдите остальные углы этой трапеции, если длина меньшего основания ее равна длине второй боковой стороны.

649. Около окружности описан пятиугольник, длины сторон которого равны a, b, c, d, e. Найдите длины отрезков, на которые точка касания делит сторону, имеющую длину a.

650. Измерьте длину минутной стрелки ваших часов. Какой путь опишет конец ее за сутки, за месяц (30 дней), за год (365 дней)?

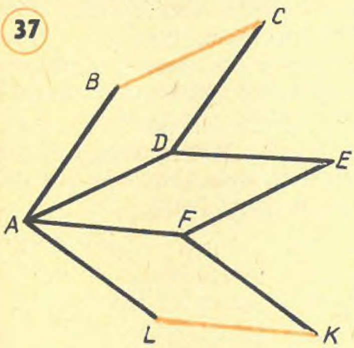
651. Диаметр вала колодезного ворота равен 0,24 м. Чтобы вытянуть ведро со дна колодца, приходится делать 10 оборотов. Какова глубина колодца?

652. Эйфелева башня в Париже, высота которой около 300 м, сделана из железа и имеет массу около 8000 т. Какую высоту будет иметь железная модель ее массой 1 кг?

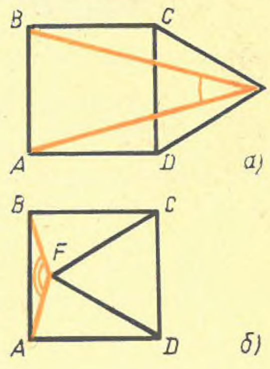
653. Две чугунные отливки массой 26,2 и 29,7 кг имеют наружные объемы 3,77 и 4,24 дм^3. Какая из этих отливок имеет внутри раковины (пустоты) и каков общий объем этих раковин, если плотность чугуна равна 7,8 г/см^3?

654. На никелирование чайника с поверхностью 7,5 дм^2

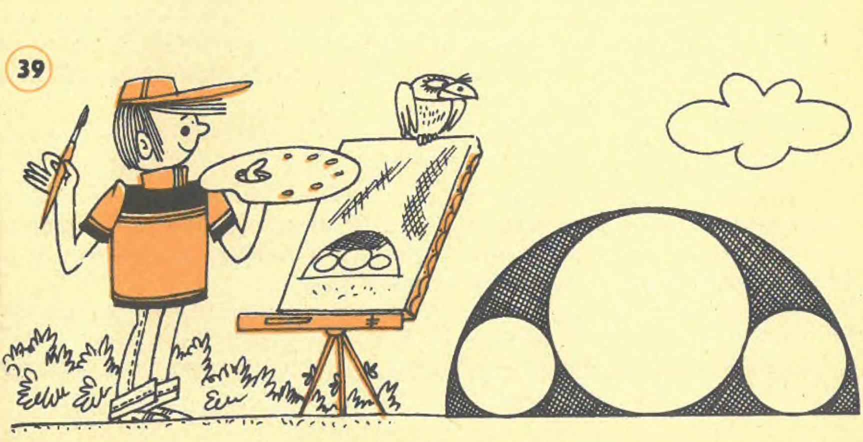
37



38



39



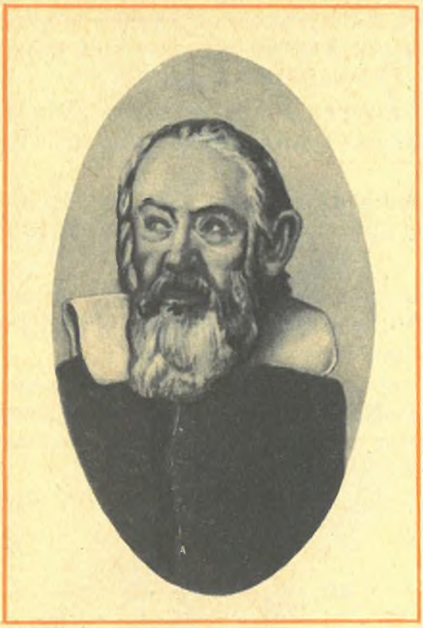
израсходовано 13,2 г никеля. Какова толщина слоя никеля, покрывающего чайник? (Плотность никеля 8,8 г/см^3.)

655. Масса Большого Тунгусского метеорита, по подсчетам ученых, достигала 50 000 т. Какой длины ребро имел бы железный куб той же массы? (1 м^3 железа имеет массу 7,8 т.)

656. Как изменится объем прямоугольного ящика, если длину его увеличить на 50%, ширину оставить без изменения, а высоту уменьшить в $1\frac{1}{2}$ раза?

657. Масса кирпича 4 кг. Какую массу имеет игрушечный кирпичик, сделанный из того же материала, если все размеры его в 4 раза меньше?

658. Что больше — площадь трех внутренних кругов или заштрихованной части полукруга (рис. 39)?



Г. ГАЛИЛЕЙ
(1564—1642)

«...Природа формулирует свои законы языком математики».

ДОКАЖИТЕ

659. Верно ли считать четырехугольник квадратом, если его стороны имеют равные длины?

660. Правильно ли утверждать, что четырехугольник является квадратом, если равны длины его диагоналей? А если равны длины всех четырех отрезков, на которые диагонали делятся точкой их пересечения?

661. Укажите правильные способы проверки того, что четырехугольник является квадратом.

662. На клетчатой бумаге построена замкнутая ломаная линия, каждое звено которой равно стороне клетки и любые два смежных звена взаимно перпендикулярны. Докажите, что число звеньев этой ломаной кратно 4.

663. Дан правильный n-угольник. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки его до прямых, определяемых сторонами n-угольника, постоянна (не зависит от выбранной точки). Чему равна эта сумма?

664. Дан равноугольный многоугольник. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки его до прямых, определяемых сторонами многоугольника, постоянна.

665. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно трех его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

666. На сторонах параллелограмма (любого) вне его построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие последовательно центры этих квадратов, образуют квадрат.

667. На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники $AC'B$, $BA'C$ и $CB'A$. Докажите, что $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.

668. На плоскости даны 5000 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что можно построить 1000 непересекающихся пятиугольников с вершинами в данных точках.

669. Пусть M — произвольная внутренняя точка равностороннего треугольника ABC. Докажите существование треугольника, стороны которого соответственно равны MA, MB и MC.

670. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите существование треугольника, стороны которого равны AM, BM и CM.

671. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Середины противоположных сторон его соединены отрезками MN и PQ. Докажите, что средние точки диагоналей данного четырехугольника и точка пересечения отрезков MN и PQ лежат на одной прямой.

672. Докажите, что куб длины гипотенузы прямоугольного треугольника больше суммы кубов длин катетов.

673. На прямой даны k отрезков так, что каждые два из них имеют хотя бы одну общую точку. Докажите, что имеется по крайней мере одна точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

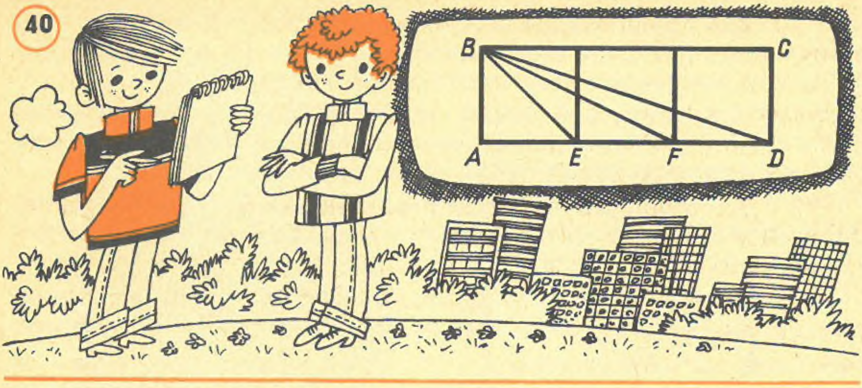
674. Теорема Птолемея *. Для любого вписанного в окружность четырехугольника произведение длин его диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон. Докажите.

675. Теорема Чевы**. Если прямые, соединяющие какую-либо внутреннюю точку M треугольника ABC с вершинами, пересекают его стороны AB, BC и CA соответственно в точках C_1, A_1 и B_1, то $\frac{|AB_1|}{|B_1C|}\cdot\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|BC_1|}{|C_1A|}=1$. Докажите.

676. Из трех равных квадратов, как показано на рисунке 45, составлен прямоугольник. Из вершины B его проведены

---

* Клавдий Птолемей — древнегреческий ученый, жил во II в. н. э.
** Джованни Чева — итальянский математик, XVII в.



три луча: BE, BF и BD. Докажите (без применения тригонометрии), что $\angle AEB + \angle AFB + \angle ADB = 90°$.

677. Задача четырех красок*.

Географические карты обычно печатаются в несколько красок. Каждая страна и область страны окрашиваются одним цветом. Для облегчения печатания таких карт обычно удовлетворяются окрашиванием в различные краски лишь примыкающих друг к другу (имеющих общую границу) стран или областей (правильные карты). Докажите, приведя примеры, что двух и трех красок для печатания таких географических (правильных) карт недостаточно.

Многолетняя практика изготовления географических карт приводит к выводу, что четырех красок достаточно. Эта проблема решена и теоретически: четырех красок достаточно для раскраски любой карты на сфере.

ПОСТРОЙТЕ

678. Два поселка A и B расположены по разные стороны и на разных расстояниях от берегов реки. Где следует устроить переходный мост через речку, чтобы он одинаково отстоял от обоих поселков? (Берега реки считайте параллельными прямыми.)

679. На одном и том же берегу реки, на разных расстояниях от нее, расположены два села A и B. Где следует построить мост через реку, чтобы он отстоял от этих сел на одном и том же расстоянии?

680. Дан угол в 36°. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в 99°?

* Эта задача впервые была поставлена английским математиком Кели в 1879 г.

681. Дан угол в 54°. Как с помощью циркуля и линейки разделить его на три равных угла?

682. Дан угол в 19°. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в 1°?

683. Постройте треугольник со сторонами a, b и c по трем данным отрезкам $a+b$, $b+c$ и $a+c$.

684. Дан острый угол BAC и на одной из его сторон точка M. Постройте на этой же стороне угла такую точку N, которая была бы одинаково удалена от точки M и от другой стороны угла.

685. Постройте ромб по диагонали и его высоте.

686. Дан угол и точка вне его. Постройте прямую, проходящую через данную точку и отсекающую от угла треугольник данного периметра.

687. Постройте множество центров всех окружностей, каждая из которых касается двух данных концентрических окружностей, имеющих радиусы r_1 и r_2 $(r_1 > r_2)$.

688. Даны две параллельные прямые и между ними окруж-

41

ность. Постройте окружности, касающиеся данных параллельных прямых и данной окружности.

689. Одно плечо шлагбаума имеет длину 4 м, другое — 1 м. На сколько поднимется конец длинного плеча, если шлагбаум повернется из горизонтального положения около оси вращения на 60°? На сколько опустится при этом конец короткого плеча? (Решите графически — с помощью построений и измерений.)

690. Дана полуокружность. На ее диаметре построены две равные полуокружности, касающиеся друг друга и данной полуокружности. Постройте окружность, касающуюся трех данных полуокружностей.

691. Постройте прямоугольный треугольник по медианам, проведенным к катетам.

692. Постройте треугольник по высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной и той же вершины.

693. Задача Потенота*. Наблюдатель, имеющий карту некоторого участка земли, находится в одном из пунктов этого участка. Он видит три заметных ориентира (например, ветряную мельницу (A), замок (B) и избушку (C), отмеченные на его карте (рис. 41)). Из того же пункта (точка D), в котором находится наблюдатель, он измеряет два угла α и β, под которыми видны на местности отрезки AB и BC. Как наблюдателю нанести на карту ту точку на местности, где он находится?

ПОСТРОЕНИЯ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ

694. Дан отрезок AB, расположенный на самом краю листа бумаги. Требуется к этому отрезку через его середину провести перпендикуляр. Как это сделать?

695. Вершина C треугольника ABC не уместилась на чертеже. Постройте основания высоты и биссектрисы, проведенных из вершины C.

696. Вершина угла ABC недоступна, D — внутренняя точка этого угла. Придумайте несколько способов построения прямой BD.

697. Вершина A треугольника ABC не уместилась на чертеже. Как построить высоту этого треугольника к стороне BC?

---

* В общем виде эта задача заключается в определении положения какой-либо точки на местности по двум углам (с вершиной в этой точке), образованным направлениями на три точки, положение которых известно. Французский математик Л. Потенот (1660—1732) дал одно из геометрических решений этой интересной и практически важной задачи. Еще раньше, в начале XVII в., задача была решена голландским математиком и астрономом В. Снеллиусом, а некоторые способы решения были известны уже в XVI в.

698. Как в треугольнике, одна из вершин которого не уместилась на чертеже, провести медианы?

699. Даны две точки A и B. Как с помощью циркуля и линейки провести через эти точки прямую линию, если линейки короче расстояния между ними?

700. Дан $\angle ABC$. Пользуясь только циркулем, постройте точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

701. Даны точка A и прямая, заданная двумя ее точками B и C. Пользуясь только циркулем, постройте такую точку D, чтобы отрезки AD и BC лежали на параллельных прямых.

702. Пользуясь только циркулем: 1) постройте точку, симметричную данной точке A, относительно прямой, заданной точками B и C; 2) из данной точки A опустите перпендикуляр на данную прямую BC, т. е. постройте еще одну точку перпендикуляра к BC, проходящего через A.

703. Даны две точки A и B. Требуется, пользуясь только циркулем, построить точку, которая лежала бы на прямой, определяемой точками A и B. Как это сделать?

704. Даны две точки A и B. Пользуясь одним циркулем, постройте такую точку C, чтобы $|AC| = 3|AB|$.

705. Дан отрезок AB. Пользуясь одним циркулем, постройте такую точку P, чтобы она лежала на прямой AB и $|AP| = 5|AB|$.

706. С помощью одного чертежного треугольника найдите центр данной окружности.

707. Пользуясь одной линейкой, опустите из точки A, лежащей вне данного круга, перпендикуляр на данный диаметр этого круга.

708. С помощью одной масштабной линейки постройте прямой угол с вершиной в данной точке C.

709. С помощью одной двусторонней линейки: 1) разделите данный угол пополам; 2) разделите данный отрезок пополам.

710. Пользуясь только циркулем, постройте углы в 30°, 60° и 90°.

711. Дана окружность, положение центра которой отмечено. С помощью одного циркуля разделите ее на 4 равные дуги.

712. Внутри круга, центр которого O отмечен, дана точка A. С помощью одного циркуля найдите концы хорды, делящейся точкой A пополам.

713. Даны две точки A и A_1, симметричные относительно данной оси a, и точка B. С помощью одной линейки постройте точку, симметричную B, относительно оси a.

714. Сложите три равных квадрата: 1) из 11 спичек; 2) из 10 спичек.

715. Положите 12 спичек так, чтобы получилось: 1) 2 квадрата, 2) 3 квадрата, 3) 5 квадратов, 4) 6 квадратов.

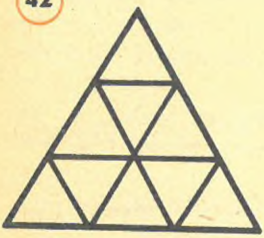
716. Из 6 спичек сложите 4 равносторонних треугольника.

717. Из спичек сложена фигура, состоящая из 9 равных треугольников (рис. 42). Уберите 5 спичек так, чтобы остались 5 треугольников.

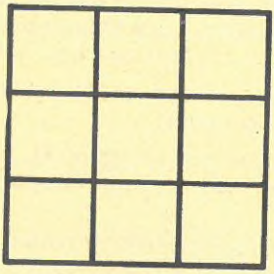
718. Составьте ту же самую фигуру (рис. 42) и: 1) переложите 6 спичек так, чтобы получилась фигура, составленная из 6 равных ромбов; 2) уберите 6 спичек так, чтобы не осталось ни одного треугольника.

719. Из спичек сложена такая фигура (рис. 43): 1) уберите 4 спички так, чтобы осталось 5 квадратов; 2) уберите 8 спичек так, чтобы осталось 2 квадрата; 3) уберите 6 спичек так, чтобы осталось всего 3 квадрата.

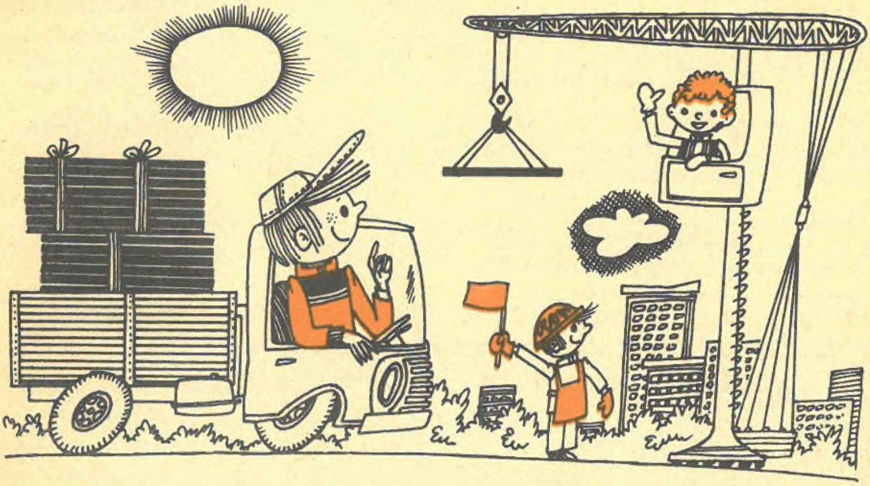
42



43



44



45

46

47

48

720. Из спичек сложена фигура, состоящая из 6 равносторонних треугольников (рис. 44). Переложите 4 спички так, чтобы получились 3 равносторонних треугольника.

721. Из 12 спичек сложите 4 равных квадрата. 1) Переместите 3 спички так, чтобы получились 3 равных квадрата. 2) Уберите 2 спички так, чтобы из данной фигуры получились: а) 3 квадрата, б) 2 квадрата.

722. Постройте замкнутую ломаную линию, состоящую из трех звеньев и проходящую через четыре данные точки (рис. 45).

723. Как ломаной линией, состоящей из четырех отрезков, не отрывая карандаша от бумаги, перечеркнуть девять точек, расположенных так, как показано на рисунке 46.

724. Как разместить 6 кружков на плоскости так, чтобы получились 3 ряда по 3 кружка и 6 рядов по 2 кружка?

725. Как разместить 10 кружков на пяти равных отрезках так, чтобы на каждом из них лежало по 4 кружка?

726. Изображенную на рисунке 47 фигуру требуется разделить на 6 частей, проведя всего лишь 2 прямые. Как это сделать?

727. Участок с четырьмя колодцами, имеющий форму равностороннего треугольника (рис. 48), надо разделить на такие участки, чтобы они были одинаковы по форме, равны по площади и чтобы на каждом из них было по колодцу (изображенному на рисунке квадратом). Как это сделать?

728. Какой наиболее простой формы (с плоскими гранями) должен быть камень, чтобы первобытный человек, сделав в этом камне отверстие и насадив камень на палку, мог бы получившимся орудием пользоваться как топором и как мотыгой?

РАЗРЕЖЬТЕ ПРАВИЛЬНО НА ЧАСТИ

729. Как данный прямоугольник следует разрезать на две такие части, чтобы из них можно было сложить: 1) треугольник, 2) параллелограмм (отличный от прямоугольника), 3) трапецию?

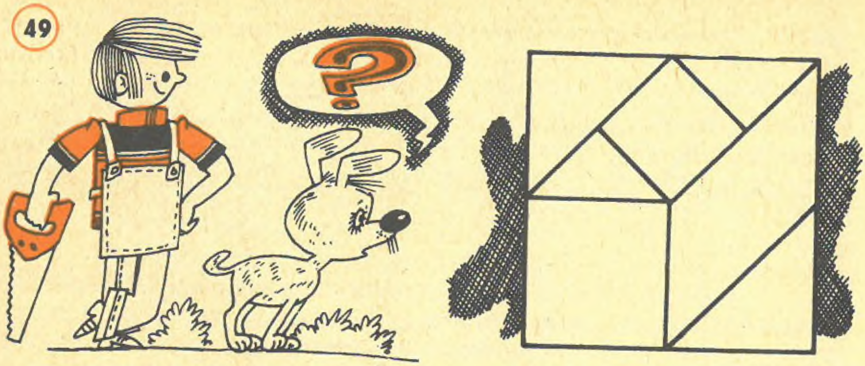
730. Дан прямоугольник, основание которого в два раза больше высоты. 1) Как нужно разрезать данный прямоугольник на две части, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник? 2) Как нужно разрезать данный прямоугольник на три части, из которых можно было бы составить квадрат?

731. Как можно равносторонний треугольник разрезать на: 1) два равных треугольника; 2) три равных треугольника; 3) четыре равных треугольника; 4) шесть равных треугольников; 5) восемь; 6) двенадцать?

732. Даны два равных квадрата. Как разрезать каждый из них на две части так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат?

733. Как данный прямоугольник двумя прямолинейными разрезами разбить на два равных пятиугольника и два равных прямоугольных треугольника?

734. Даны два неравных квадрата. Как их следует разрезать на такие части, чтобы из них можно было сложить третий



квадрат? Как выражается длина стороны третьего квадрата через длины сторон двух данных?

735. Прямоугольная плитка шоколада состоит из $m \cdot n$ единичных квадратных долек. Сколько разломов нужно сделать (одновременно ломается один кусок), чтобы разломить эту плитку на единичные квадратные дольки?

736. Сколько нужно сделать разрезов плоскостями так, чтобы из куба с ребром в 3 дм получить кубики с ребром в 1 дм?

737. Дан прямоугольный треугольник. Как следует разрезать его на две такие части, чтобы из них (не переворачивая обратной стороной) можно было сложить треугольник, симметричный данному относительно одного из его катетов?

738. Дан треугольник ABC. Как следует разрезать его на части так, чтобы из них (не переворачивая обратной стороной) можно было сложить треугольник, симметричный данному относительно основания AC?

739. Разрежьте квадрат на части, как показано на рисунке 49, перемешайте их и затем сложите: 1) такой же квадрат; 2) прямоугольный равнобедренный треугольник; 3) прямоугольник, отличный от квадрата; 4) параллелограмм, отличный от прямоугольника; 5) трапецию.

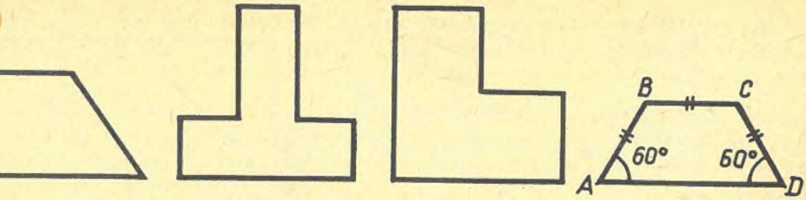
740. Окрашенный куб с ребром в 10 см распилили на кубики с ромбом в 1 см. Сколько получится кубиков: 1) с одной окрашенной гранью; 2) с двумя; 3) с тремя; 4) совсем не имеющих окрашенных граней?

741. Как разрезать на две части прямоугольник со сторонами 16 и 9 см так, чтобы из них можно было сложить квадрат? (Разрез может быть в виде ломаной линии.)

742. Скопируйте каждую из фигур рисунка 50 и разрежьте ее на 4 равные части.

743. 1) Как данный прямоугольный треугольник разрезать на остроугольные треугольники? 2) Как данный произвольный треугольник разрезать на остроугольные треугольники?

50



744. Внутри выпуклого стоугольника отмечены 10 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники так, что вершинами их служат все вершины данного стоугольника и все данные десять точек. Сколько получится треугольников?

ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

745. Сколько углов, меньших 360°, получится, если из одной точки плоскости провести 3 луча?

746. Сколько получится острых углов, если внутри данного острого угла из его вершины провести 3 луча?

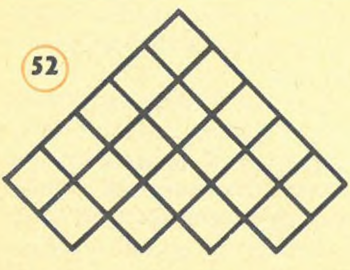
747. Сколько всего треугольников в каждой из двух фигур на рисунке 51?

748. Сколько всего квадратов на рисунке 52?

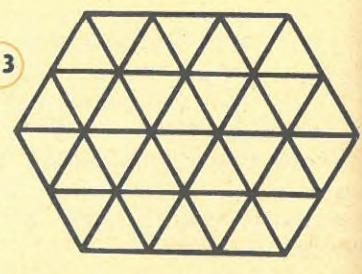
749. Сколько правильных шестиугольников на рисунке 52?

51

52



53



750. Имеется монета. Сколько нужно таких же монет, чтобы их можно было расположить вокруг данной монеты так, чтобы все они касались данной монеты и попарно друг друга?

751. По окружности неподвижного круга перекатывается без скольжения другой круг, радиус которого в 3 раза меньше радиуса неподвижного круга. Сколько раз обернется вокруг своего центра движущийся круг за то время, в течение которого он прокатится вокруг большего круга один раз?

752. Какими простыми приспособлениями можно воспользоваться для нахождения центра круга?

753. По углам бассейна квадратной формы стоят 4 столба. Потребовалось расширить этот бассейн так, чтобы площадь его стала в два раза больше, а форма осталась бы квадратной. Можно ли это сделать, не убирая столбов? Если можно, то как?

754. Исследуйте, какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

755. Ученик в книге по геометрии прочитал, что задача о делении угла на три равные части с помощью циркуля и линейки неразрешима. «Как же так? — подумал он. — Я очень легко с помощью циркуля и линейки могу разделить на три равные части прямой угол, угол в 45° и некоторые другие». Объясните недоумение ученика.

ПЛОЩАДИ

756. Дан квадрат. Постройте квадрат, площадь которого была бы в 5 раз больше площади данного квадрата.

757. Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ имеет длину a, а расстояние от середины AB до CD равно b. Выразите площадь этой трапеции через a и b.

758. Обхват дерева (длина окружности) — 88 см. Вычислите (с точностью до 1 см^2) площадь поперечного сечения этого дерева. Составьте таблицу для нахождения по ней площади поперечного сечения дерева по обхвату его. Сделайте это, например, для таких обхватов: 20, 30, 40, 50, 60 и 70 см, 1 м.

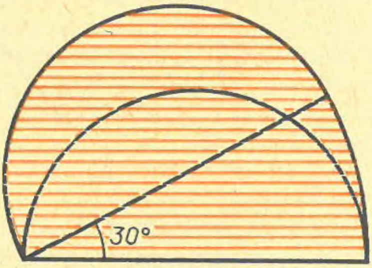
759. Диаметр опаленной площади тайги от взрыва Большого Тунгусского метеорита равен приблизительно 38 км. Какая площадь тайги была опалена?

760. Две водопроводные трубы одного и того же диаметра нужно заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Каким должен быть диаметр этой трубы по сравнению с диаметром каждой из заменяемых труб?

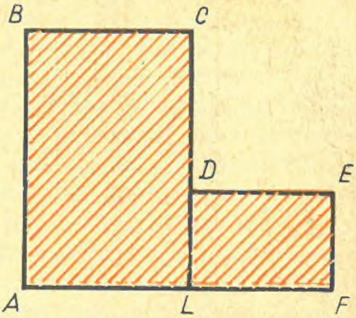
761. Дан круг. Постройте круг, площадь которого была бы больше площади данного круга: 1) в 10 раз; 2) в 13 раз.

762. Полуокружность радиуса 1 повернута вокруг конца своего диаметра на 30° (рис. 54). Найдите площадь заштрихованной фигуры.

54



55



763. Дана фигура $ABCDEF$, составленная из двух прилежащих прямоугольников (рис. 55). Постройте прямоугольник с основанием AB, равновеликий данной фигуре.

764. Дан треугольник, площадь которого равна 1. Найдите площадь треугольника, образованного медианами данного треугольника.

765. Дан прямоугольный треугольник. 1) Сравните площади полукругов, построенных на гипотенузе и катетах. 2) Сравните площади равносторонних треугольников, построенных на гипотенузе и катетах. 3) На гипотенузе и катетах данного прямоугольного треугольника построены подобные многоугольники, для которых гипотенуза и катеты являются сходственными сторонами. Сравните площади этих многоугольников.

766. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин его наибольшей и наименьшей диагоналей.

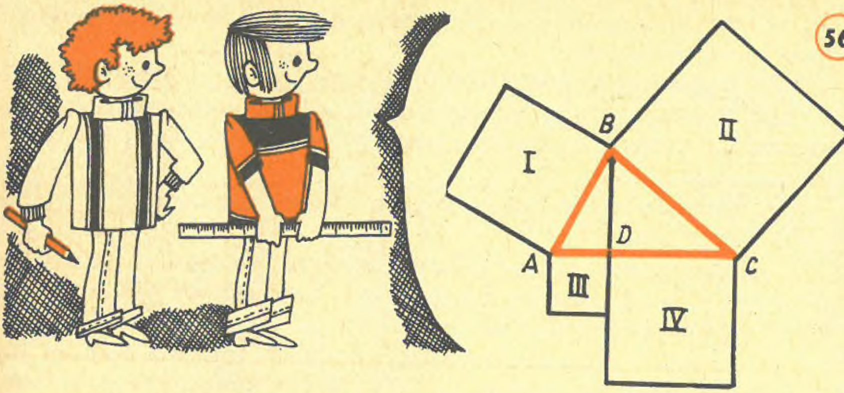
767. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания этой окружности делит гипотенузу на отрезки, имеющие длину p и q. Найдите площадь треугольника.

768. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Какое множество точек образуют все такие точки O, для которых площади четырехугольников $OBCD$ и $OBAD$ равны?

769. Найдите на стороне данного треугольника такую точку, чтобы проходящий через нее перпендикуляр к другой стороне делил треугольник на две равновеликие части.

770. (Рис. 56.) ABC — остроугольный треугольник. $BD \perp AC$ I, II, III, IV — квадраты. Докажите, что $S_{II} - S_{I} = S_{IV} - S_{III}$ (S_{I}, S_{II}, S_{III}, S_{IV} — площади квадратов I, II, III, IV).

1) Прямоугольник составлен из равных квадратных клеточек: в длину — 163, а в ширину — 65. Можно ли этот прямоугольник разбить на «уголки» по 3 клетки в каждом? 2) Можно ли произвести разбиение на такие «уголки» прямоугольника, имеющего в длину 161, а в ширину 66 клеток?



56

772. Какой гвоздь крепче держится в деревянной стене (труднее вытащить из стены) — круглый, квадратный или треугольный, если забивать их на одну глубину и площади их поперечных сечений равны?

ВОССТАНОВИТЕ

773. Постройте квадрат по двум точкам, принадлежащим противоположным сторонам его, и центру симметрии.

774. Даны три вершины A, B и C равнобедренной трапеции $ABCD$. Достройте трапецию. Сколько решений имеет эта задача?

775. 1) На школьном участке была намечена полоса для выращивания опытного сорта моркови (были прочерчены по земле края полосы). Через несколько дней намеченные края этой полосы стали незаметными (их размыл прошедший дождь). Но остались 3 колышка: по одному на каждом краю полосы и один на ее средней линии. Как по этим колышкам восстановить полосу? 2) Восстановите полосу: а) по двум колышкам на одном краю и колышку на другом, б) по двум колышкам на средней линии и одному колышку на краю.

776. Саша начертил параллелограмм $ABCD$, отметил точку M — середину BC, точку N — середину CD и пошел в другую комнату дать корм рыбкам и понаблюдать за ними. Старший брат Саши, студент-математик стер на чертеже все, оставив специально для размышления Саше только точки A, M и N. Помогите Саше восстановить чертеж.

777. Восстановите квадрат по четырем точкам его, лежащим по одной на каждой стороне.

778. Постройте квадрат по двум точкам, принадлежащим смежным сторонам его и точке пересечения диагоналей.

779. Восстановите равнобедренный треугольник по основаниям его биссектрис.

780. Дана прямая и две точки, лежащие по одну сторону от нее. Постройте треугольник так, чтобы одна сторона его лежала на данной прямой, а данные точки служили бы основаниями его высот.

781. Восстановите треугольник по его основанию и точке пересечения высот.

782. Постройте треугольник по трем точкам, в которых продолжения его высот пересекают описанную около этого треугольника окружность.

783. Даны 3 пересекающиеся в точке O прямые a, b, c. На прямой a отмечена точка A. Постройте треугольник с вершиной в точке A, для которого из этих трех прямых лежали бы: 1)высоты его; 2) медианы; 3) биссектрисы.

784. Восстановите трапецию по концам средней линии ее, точке O пересечения диагоналей и основанию перпендикуляра, проведенного из O к большему основанию.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

785. *Спираль Архимеда.* Представьте себе, что по радиусу равномерно вращающегося диска с постоянной скоростью ползет муха. Путь, описанный мухой, — это кривая, называемая спиралью Архимеда. Начертите какую-нибудь спираль Архимеда.

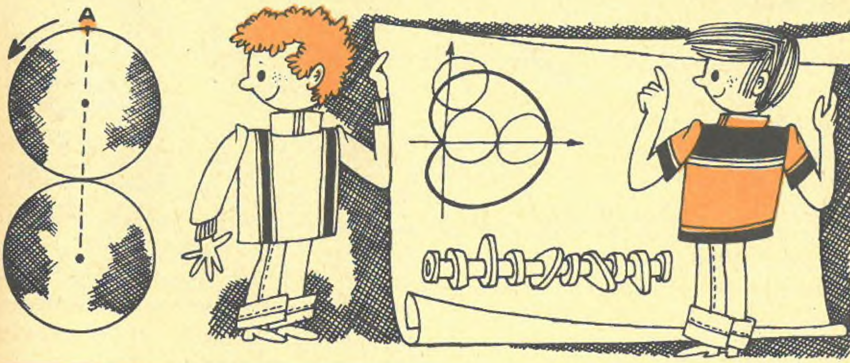
786. *Синусоида.* Сделайте из плотной бумаги, свернув ее несколько раз, трубочку. Разрежьте эту трубочку наклонно. Посмотрите на линию разреза, если развернуть одну из частей этой трубочки. Перерисуйте эту линию на лист бумаги. У вас получится одна из замечательных кривых, называемая синусоидой. Особенно часто с ней приходится встречаться при изучении электротехники и радиотехники.

787. *Конхоида Никомеда*.* Постройте кривую линию, называемую конхоидой Никомеда. Сделать это можно так. На листе бумаги проведите прямую AB и вне ее возьмите точку O (полюс). Затем выберите отрезок a, длина которого пусть будет меньше расстояния от O до AB. Далее, через точку O проведите прямые и от точки пересечения каждой из этих прямых с AB откладывайте на ней в обе стороны от AB отрезок a. Каждый раз вы будете получать две точки искомой кривой. Конхоида Никомеда состоит из двух ветвей, лежащих по разные стороны от AB.

---

* Никомед — греческий математик, живший в III в. до н. э.

57



Попытайтесь догадаться, какой вид будет иметь конхоида Никомеда, если длина отрезка a будет: 1) равна расстоянию от точки O до прямой AB; 2) больше этого расстояния.

Конхоида Никомеда имеет исторический интерес. За 200 лет до нашей эры она была применена к решению знаменитой задачи о делении произвольного угла на 3 равные части.

Такие же построения, как только что описанные, можно выполнить, взяв вместо прямой AB окружность. В этом случае полюс O можно брать по-разному. Рассмотрите хотя бы два случая: 1) полюс O совпадает с центром окружности; 2) лежит на окружности и a равняется радиусу этой окружности. Какие линии (их называют улитками Паскаля*) получатся?

788. *Кардиоида.* Возьмите два равных кружочка, вырезанных из фанеры (можно взять две одинаковые монеты). Один из этих кружочков закрепите. Второй приложите к первому, отметьте на краю его точку A, наиболее удаленную от центра первого кружка (рис. 57). Затем катите без скольжения подвижный кружочек по неподвижному и наблюдайте, какую линию опишет точка A. Начертите эту линию. Она является одной из улиток Паскаля и называется кардиоидой. В технике эта кривая часто используется для устройства кулачковых механизмов.

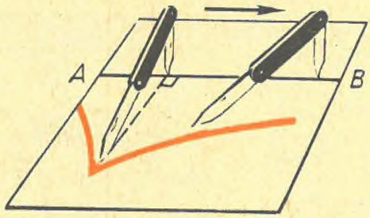
Сколько оборотов сделает второй кружок к тому времени, когда он вернется в первоначальное положение? Ответ проверьте, воспользовавшись для этого двумя одинаковыми монетами.

789. *Развертка окружности.* Возьмите кружочек, выпиленный из фанеры или дощечки, и закрепите его на листе бумаги, лежащем на столе. Намотайте на этот кружочек нить. На конце этой нити сделайте петлю, вставьте в нее карандаш и, натягивая нить, сматывайте ее с кружочка. Тогда конец карандаша

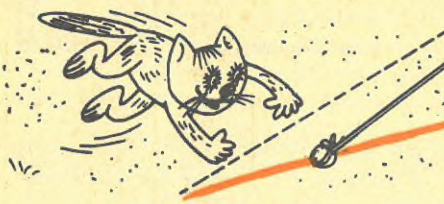
---

* Э. Паскаль (1588—1651) — отец знаменитого французского математика — Б. Паскаля.

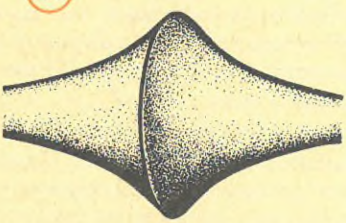
58



59

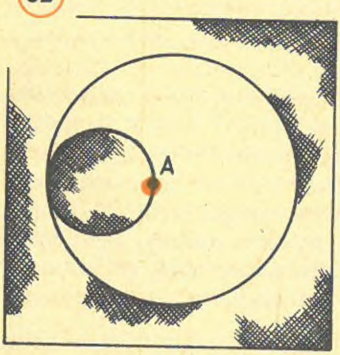



60



61

62



на листе бумаги опишет некоторую кривую линию (спираль). Эта линия называется эвольвентой (разверткой) окружности. По какой линии полетел бы с земли камень, если бы на него перестала действовать сила земного притяжения и не мешало бы сопротивление воздуха.

790. *Трактриса.* Возьмите лист бумаги. Проведите на нем прямую AB. Затем возьмите перочинный ножик, у которого лезвия были бы с двух концов. Раскройте эти лезвия, как показано на рисунке 58, и расположите ножик над листом бумаги так, чтобы острия его находились на прямой, перпендикулярной AB. Кончик полураскрытого лезвия должен находиться на прямой AB. Свободно держась рукой за это лезвие, перемещайте ножик так, чтобы кончик полураскрытого лезвия перемещался по AB. Тогда второе, полностью раскрытое лезвие своим острием прочертит на бумаге тонкую линию. Обведите ее карандашом. Полученная линия называется трактрисой (линией влечения).

Такую линию можно прочертить и на местности. На песчаной площадке прочертите прямую линию, а затем возьмите шнур и привяжите к нему камень. Встаньте на прочерченную прямую и расположите шнур с камнем так, чтобы он был перпендикулярен этой прямой и камень лежал бы на песке. Затем, держа конец шнура в руке, идите по отмеченной прямой и тяните за собой привязанный к шнуру камень. Линия, прочерченная на песке камнем, и будет трактрисой (рис. 59).

Представьте себе, что трактриса вращается вокруг прямой AB. Получится поверхность, напоминающая два бесконечных рупора, сложенные своими раструбами (рис. 60). Эта поверхность, играющая важную роль в геометрии, называется псевдосферой.

791. *Циклоиды.* Представьте себе, что по прямой линии без скольжения катится круг. Проследите за тем путем, который опишет при этом точка A, взятая на окружности этого круга (рис. 61). Начертите получившуюся кривую. Она называется циклоидой.

Циклоида обладает многими замечательными свойствами. Вот одно из них.

Давно математики пытались решить такую задачу: какой формы должен быть гладкий желоб, соединяющий две точки A и B (A — выше, чем B), чтобы гладкий металлический шарик скатился по этому желобу из точки A в точку B под действием своего веса в кратчайшее время. Можно подумать, что желоб должен быть прямолинейным. Но это не так. Может быть, желоб следует выгнуть по дуге окружности, как думал выдающийся итальянский физик, астроном и математик Галилей? Нет, Галилей ошибался. И только в 1696 г. швейцарский математик И. Бернулли установил, что желоб должен быть выгнут по циклоиде, опрокинутой вниз.

Пусть к кругу, катящемуся по прямой линии, радиально прикреплена тонкая планочка. Какую линию опишет точка, лежащая на этой планочке и отстоящая от центра круга на расстоянии, большем радиуса? А какая линия получится, если это расстояние будет меньше радиуса? Каждая из этих кривых называется также циклоидой; в первом случае — удлиненной, во втором — укороченной.

792. *Гипоциклоиды.* Возьмите кусок толстого картона или фанеры и сделайте в нем круговой вырез радиуса 12 см. Из того же материала вырежьте затем три кружка с радиусом 4, 3 и 2 см. Положите кусок картона с вырезанным в нем отверстием на лист бумаги и вложите в этот вырез первый из трех кружков, чтобы он касался края выреза, и отметьте на окружности этого выреза точку (рис. 62). Проследите за тем, какую линию опишет отмеченная точка, когда кружок покатится без скольжения по окружности выреза. Проделайте то же самое со вторым и третьим кружками. Все получившиеся линии называются гипоциклоидами.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВИКТОРИНА

793. Прямая MN лежит внутри угла ABC, который больше нулевого угла, но не больше полного. Какой это угол?

794. Можно ли из проволоки, длина которой 20 см, согнуть такой треугольник, одна сторона которого была бы равна: 8 см; 2) 10 см; 3) 12 см?

795. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 20 см, другая равна $\frac{2}{5}$ третьей. Чему равен периметр этого треугольника?

796. Все высоты данного треугольника пересекаются в одной из его вершин. Какой это треугольник?

797. Высоты данного треугольника не пересекаются. Какой это треугольник?

798. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Какие углы имеет этот ромб?

799. В круговой сегмент вписан квадрат так, что две его вершины, лежащие на дуге, делят дугу сегмента на три равные части. Сколько градусов содержит дуга этого сегмента?

800. Могут ли быть перпендикулярными радиус и хорда, проведенные из одной и той же точки окружности?

801. Какой многоугольник называется равноугольным? Приведите примеры.

802. Можно ли построить равноугольный многоугольник, около которого нельзя описать окружность?

803. Можно ли вписать в окружность неправильный равноугольный многоугольник?

804. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными? А медианы? А высоты?

805. Один из углов равнобедренного треугольника содержит 38°. Какой это треугольник: остроугольный или тупоугольный?

806. Стороны равностороннего треугольника в 1 дм разделены каждая на 5 равных частей и через точки деления проведены отрезки, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на малые равные равносторонние треугольники. Какой длины получится отрезок, если распрямить получившуюся треугольную сеть?

807. Квадрат со стороной 1 дм отрезками разделен на 100 равных квадратов. Какой длины получится отрезок, если распрямить всю сетку, образованную сторонами квадратов?

808. Диаметр полуокружности разделен на несколько частей и на каждой из них, как на диаметре, построена полуокружность. Сравните длину полуокружности с суммой длин всех полуокружностей, построенных на частях диаметра.

809. На плоскости даны два непересекающихся параллелограмма. Как следует провести прямую так, чтобы каждый параллелограмм разделился ею на равные части?

810. Из каких правильных многоугольников можно составить паркет?

811. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей этой трапеции?

812. Дан треугольник. Можно ли провести прямую линию так, чтобы она пересекала все стороны треугольника?

813. Для проверки того, что вырезанный кусок материи имеет форму квадрата, швея перегибает его по каждой диагонали и убеждается, что края каждый раз совпадают. Достаточна ли такая проверка?

814. Какое наибольшее число тупых внешних углов может иметь выпуклый многоугольник?

815. О выпуклом многоугольнике известно, что все внешние углы его тупые. Какой это многоугольник?

816. В выпуклом шестиугольнике три внутренних угла прямые. Сколько среди остальных углов его острых?

817. Противоположные углы выпуклого четырехугольника попарно равны. Является ли такой четырехугольник параллелограммом?

818. Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на два остроугольных треугольника?

819. Можно ли какой-нибудь разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?

820. Какой четырехугольник имеет лишь: 1) одну ось сим-

метрии; 2) центр симметрии; 3) центр и две оси симметрии; 4) центр и четыре оси симметрии?

821. Из одной точки окружности проведены две хорды. Сколько получилось сегментов?

822. На прямой линии отмечены n точек. Сколько лучей на ней они определяют?

823. На сколько частей, имеющих не более одной общей точки, делят четыре точки: 1) отрезок; 2) окружность?

824. На сколько частей, имеющих не более одного общего луча, делят плоскость прямые, определяемые сторонами: 1) треугольника; 2) квадрата; 3) правильного шестиугольника?

825. Листочек бумаги надо разрезать на 8 частей, ограниченных отрезками. Сколько разрезов нужно для этого сделать?

826. Какой из всех ромбов с данной стороной имеет наибольшую площадь?

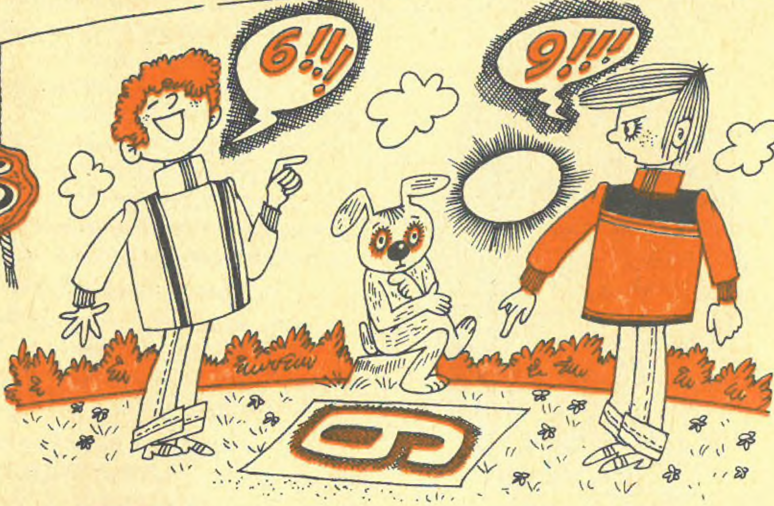
827. Имеются 13 равных квадратов. Как составить из них два квадрата?

828. Площадь прямоугольника равна 1. Какую площадь имеет треугольник, отсекаемый от прямоугольника прямой, проходящей через средние точки двух смежных его сторон?

829. Дан квадрат со стороной 4 см. В него вписан второй квадрат так, что вершинами его служат средние точки сторон первого. В получившийся квадрат таким же образом вписан третий квадрат. Вычислите периметр и площадь третьего квадрата.

830. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D. Сколько и как можно провести через эту точку прямых, которые отсекали бы от данного треугольника подобные ему треугольники?

831. О треугольнике ABC известно, что площадь его равна 1 м^2. Может ли периметр такого треугольника быть больше 100 км?



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Предмет математики настолько серьезен, что полезно не упускать случаев делать его немного занимательным.

Б. Паскаль

ВИКТОРИНА

832. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток вдвое больше прошедшей?

833. В классе 36 учащихся. Мальчиков из них на 3 человека больше, чем девочек. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

834. Сколько раз к наибольшему однозначному числу нужно прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное?

Б. ПАСКАЛЬ
(1623—1662)

«Величие человека — в его способности мыслить».

835. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

836. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 25. Найдите уменьшаемое.

837. Вычислите сумму наибольших однозначного, двузначного, трехзначного и четырехзначного чисел.

838. Вычислите: $5+10+15+20+25+...+100$.

839. Найдите числовое значение выражения: $a^2-69a+130$ при $a=70$.

840. Сколько нулей в конце записи числа, выражающего произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\times 5\cdot 6\cdot ...\cdot 14\cdot 15$?

841. Вычислите: 1) $2^{2^{2^2}}$; 2) $[(2^2)^2]^2$; 3) 1^{333}.

842. Существует ли: 1) наименьшее из всех положительных чисел, 2) наименьшее из всех неотрицательных чисел?

843. Когда полусумма двух положительных чисел равна их разности?

844. Когда произведение двух чисел равно их частному?

845. Чему равен наибольший общий делитель двух чисел, если наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению?

846. Как записать 1024 при помощи четырех четверок и знаков действий (включая возведение в степень)?

847. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток равна $1\frac{2}{3}$ прошедшей?

848. Придумайте функцию натурального аргумента, задаваемую формулой, которая при любом значении аргумента была бы простым числом.

849. Распределите буквы Г, П, Н, Р, Т, О, И, С, Х по числу осей симметрий на три группы.

850. По какому признаку составлены следующие буквы русского алфавита: 1) А, Д, М, Т, П, Ш; 2) В, Е, З, К, С, Э, Ю; 3) И; 4) Ж, Н, О, Ф, Х; 5) Б, Г, Л, Р, У, Ц, Ч, Щ, Я?

851. Сумма, произведение и частное каких двух чисел равны между собой?

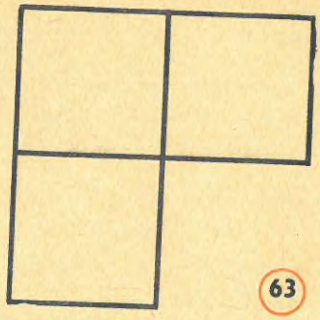
852. Кем было предложено обозначать отношение длины окружности к ее диаметру буквой π (пи)?

853. Кем были предложены знаки умножения и деления «·», «:»?

854 Когда в нашей стране была введена метрическая система мер в качестве обязательной?

855. Заглавия каких литературных произведений начинаются с чисел 3, 20, 12, 80 000?

856. Какой русский писатель окончил физико-математический факультет университета?



63

857. Как, не отрывая карандаша от бумаги, разделить фигуру на рисунке 63 на шесть равных треугольников?

858. Мой товарищ задумал некоторое натуральное число от 1 до 1000 и предлагает мне узнать, какое именно число он задумал. Мне разрешается задать товарищу не более десяти вопросов, на которые он верно будет отвечать «Да» или «Нет». Какие вопросы мне надо задать? Достаточно ли для этого десяти вопросов?

РАЗВЛЕЧЕНИЯ. ИГРЫ

859. На листе бумаги или на классной доске записан «столбик» чисел:

1000
30
1000
40
1000
20
1000
10

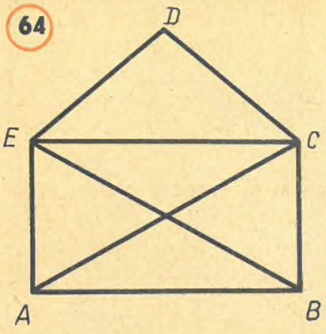
Все числа закрываются бумагой. Открывайте «столбик» число за числом, и пусть ваш товарищ быстро суммирует их устно и в конце назовет вам ответ. Верно ли сосчитал ваш товарищ? (Обычно многие называют ответ 5000, а на самом деле 4100.)

860. Не отрывая карандаша от бумаги и не проходя ни один из отрезков дважды, изобразите фигуру, как на рисунке 64.

861. **Угадайте задуманное число.** Предложите своему товарищу задумать какое-либо трехзначное число и приписать к нему точно такое же число. Получившееся шестизначное число

5 Зак. 706. Нагибин «Математическая шкатулка».

64



попросите умножить на 2, результат разделить сначала на 7, затем то, что получится, разделить на 11 и наконец разделить на 13. Если ваш товарищ скажет, что деление нацело не выполняется, то уверенно заявите, что товарищ ошибся, и предложите ему исправить ошибку. Спросите, какой получился ответ, и вы немедленно назовете задуманное товарищем число, разделив названный ответ на 2.

Подумайте, почему так получается.

Вместо того чтобы умножать получающееся шестизначное число на 2, можно предложить умножить его на 3, 5, 10 и другие числа. Тогда для получения задуманного числа названное товарищем число придется делить соответственно на 3, 5, 10 и т. д.

862. **Угадайте, сколько получится.** Предложите своим товарищам: «Задумайте каждый какое-либо трехзначное число, но обязательно такое, чтобы цифра сотен отличалась от цифры единиц и не была бы на единицу меньше или больше ее. Напишите для задуманного числа обращенное, т. е. число, изображенное теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке. Из этих двух чисел (задуманного и обращенного) возьмите большее и вычтите из него меньшее. Для получившейся разности напишите снова обращенное число и вычислите сумму этой разности и обращенного для нее числа».

Когда все это будет сделано, предложите одному из своих товарищей к получившемуся у него числу прибавить 100, другому — 200, третьему — 300 и т. д.

Вы можете каждому из участвующих в игре сказать, какое именно число у него получилось. Для этого вам каждый раз нужно будет прибавлять к числу 1089 то число, которое вы просили прибавить в конце. Так, у первого должно получиться 1189, у второго 1289 и т. д.

Еще лучше будет, если вы эти числа заранее напишете на листочках бумаги, вложите эти листочки в конверты и на них напишете имена своих товарищей, участвующих в этой игре. Вам останется торжественно вручить эти конверты их адресатам. Постарайтесь понять, в чем тут дело, и потом объясните своим товарищам.

863. **Делимость на 11.** Предложите товарищу написать на классной доске или бумаге любое многозначное число. К этому числу вы можете быстро приписать справа или слева одну цифру так, чтобы получившееся число разделилось на 11. Если, например, ваш товарищ напишет число 43 572, то вам нужно будет приписать справа или слева к этому числу 1. Получившееся число разделится на 11.

Знаете ли вы, какую цифру нужно приписать к числу, чтобы получившееся после этого число делилось на 11? Чтобы разобраться в этом вопросе, воспользуйтесь признаком делимости на 11: на 11 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр, стоящих на нечетных местах, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо больше или меньше ее на число, делящееся на 11.

Прежде чем выступать с этим числовым фокусом, поупражняйтесь, а потом объясните его вашим товарищам.

864. **Угадайте задуманное число.** В своей книге «Арифметика» Леонтий Филиппович Магницкий привел следующий способ отгадывания задуманного двузначного числа: «Если кто задумает двузначное число, то ты скажи ему, чтобы он увеличил число десятков задуманного числа в 2 раза, к произведению прибавил бы 5 единиц, полученную сумму увеличил в 5 раз и к новому произведению прибавил сумму 10 единиц и числа единиц задуманного числа, а результат произведенных действий сообщил бы тебе. Если ты из указанного тебе результата вычтешь 35, то узнаешь задуманное число». Почему так получается?

865. **Угадайте сумму цифр задуманного числа.** Предложите своим товарищам каждому задумать какое-нибудь трехзначное число, запись которого не содержит одинаковых цифр. Пусть затем, беря цифры задуманного числа по две, каждый составит всевозможные двузначные числа (таких чисел будет 6) и вычислит сумму всех этих чисел. Спросите у любого участника этого развлечения, какая сумма получилась. Разделите ее на 22, и вы найдете сумму цифр задуманного твоим товарищем числа.

Пусть, например, твой товарищ задумал число 145. Сумма всех двузначных чисел для этого числа будет равна $14 + 15 + + 45 + 41 + 51 + 54 = 220$. Если вы разделите эту сумму на 22, то действительно получите 10 — сумму цифр задуманного числа. Почему так получается?

866. **Угадайте зачеркнутую цифру.** Известен арифметический фокус. Состоит он в следующем. Предлагается написать любое трехзначное или четырехзначное число, состоящее из различных цифр. Какое именно число будет написано, отгадывающий не должен знать. Написавший число имеет право как угодно переставить цифры этого числа. Получатся два числа: записанное вначале и получившееся из него после перестановки цифр. Меньшее из этих чисел предлагается вычесть из большего, в полученной разности зачеркнуть одну цифру и вычислить сумму оставшихся. Эта сумма сообщается отгадывающему, и он говорит, какая цифра была вычеркнута.

Чтобы узнать, какая цифра была вычеркнута, отгадывающий поступает так: названную ему сумму цифр он дополняет до ближайшего большего кратного 9 (9, 18, 27, 36 и т. д.). Дополняющее число и дает вычеркнутую цифру. Если сумма сама окажется кратной 9, то зачеркнутая цифра была 0 или 9. Объясните этот фокус.

867. **Мгновенное суммирование.** Пусть кто-нибудь из ваших товарищей молча запишет на доске разность двух чисел. Вычислять разность не нужно. Тот, кто записал первую разность, или другой должен будет далее написать новую разность так, чтобы вычитаемым во второй разности было уменьшаемое первой разности. Производить вычисления также не нужно. Затем записывается третья разность так, чтобы вычитаемое было равно уменьшаемому второй разности. Продолжая, можно записать на доске любое число таких разностей. Пока это делается, вам на доску смотреть не следует. Как только все разности будут записаны на доску, повернитесь к ней лицом, посмотрите на записи, и вы сразу же можете сказать, чему будет равна сумма всех записанных, но не вычисленных разностей. Для этого вам нужно будет из уменьшаемого последней разности вычесть вычитаемое первой разности. Пусть, например, на доске будут записаны такие разности: 340—80; 450—340: 620 — 450; 680 — 620; 700 — 680; 825 — 700; 900 — 825. Сумма всех этих разностей будет равна 900 — 80, т. е. 820. Пусть ваши товарищи проверят вас, вычислив каждую разность, а затем и сумму их. Конечно, можно записывать разности не только целых чисел, но обыкновенных и десятичных дробей, а также положительных и отрицательных чисел.

Почему так получается? Разберитесь сами и объясните товарищам.

868. **Удивительная память.** Запишите заранее на классной доске или на листе бумаги 30 — 50, а можно и больше, многозначных чисел. При записи чисел нумеруйте их. Эти числа записывайте так. К номеру числа прибавьте 9, возьмите для получившегося числа обращенное. Это будет число миллионов. Дальше вычислите сумму цифр получившегося числа миллионов. Число единиц (только единиц) этой суммы даст число сотен тысяч. Чтобы найти число десятков тысяч, вычислите сумму двух последних цифр, т. е. числа миллионов и числа сотен тысяч, и возьмите опять только единицы этой суммы. Так же продолжайте дальше. Вот несколько примеров таких чисел, какие вы запишите. № 5 41561785; № 11 2246066; № 16 52796516. Подготовив все это, вы можете удивить своих товарищей замечательной памятью. Отвернитесь от доски и скажите товарищам, что вы запомнили все эти числа. Вам не поверят. Тогда предложите им проверить. Пусть кто-нибудь скажет вам номер числа. Вы, производя устно вычисления, будете читать число, как бы медленно вспоминая его. Делайте это так. Пусть вам назовут номер числа 32. Молча вычисляйте: $32 + 9 = 41$, обращенное число 14, говорите: 14 миллионов, $1 + 4 = 5$ — пятьсот, $4 + 5 = 9$ — девяносто, $5 + 9 = 14$ — 4 тысячи, $9 + 4 = 13$ — триста, $4 + 3 = 7$ — семьдесят, $7 + 3 = 10$ — единиц (14594370).

869. **Угадайте возраст и дату рождения.** Пообещайте своим

товарищам угадать возраст и дату рождения каждого из них. Для этого заставьте каждого из них проделать следующие вычисления. Порядковый номер месяца рождения нужно умножить на 100 и к получившемуся произведению прибавить число месяца, на которое приходится день рождения. Затем полученную сумму нужно умножить на 2 и к тому, что получится, прибавить 8. Результат нужно умножить на 5, к произведению прибавить 4 и получившуюся сумму умножить на 10. К тому, что получится, остается прибавить полное число лет (возраст), увеличенное на 4. Пусть каждый, выполнивший все эти вычисления, запишет на листочке бумаги свою фамилию, получившееся число и передаст листочек вам. Получив эти листочки, вы по ним каждому можете сказать его возраст и дату рождения. Придется поступать так: из получившегося числа, записанного на листочке, каждый раз вычитайте по 444 и разность разбивайте на грани справа налево по две цифры в каждой. Первая грань справа даст возраст, вторая — число и третья — порядковый номер месяца рождения.

Разберитесь в «секрете» этого развлечения и объясните его товарищам.

870. **Угадайте задуманное число.** Приготовьте семь карточек. На первой из них напишите все числа, начиная от 1 до 100, через одно число, т. е. 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99. На второй карточке напишите числа: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, ..., 98, 99. На третьей числа: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, ..., 92, 93, 94, 95. На четвертой — 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, ..., 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95. На пятой сначала напишите 16 последовательных натуральных чисел, начиная с 16, следующие 16 последовательных чисел, начиная с 32, не записывайте, затем запишите снова 16 чисел, начиная с 48, и т. д. На шестой сначала запишите 32 последовательных натуральных числа, начиная с 32, следующие 32 числа не записывайте и наконец припишите следующие числа с 96 до 100. На последующей карточке запишите все натуральные числа, начиная с 64 до 100.

Дайте вашему товарищу приготовленные таким образом карточки. Пусть он задумает какое-либо число от 1 до 100, выберет карточки, на которых это число записано. Только взглянув на эти карточки, вы можете угадать задуманное число. Для этого нужно найти сумму первых чисел, записанных на выбранных карточках. (Числа на карточках можно располагать в произвольном порядке, только нужно запомнить, какие места занимают первые числа: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.) Постарайтесь понять, почему так происходит.

871. **Любимая цифра.** Спросите у ваших товарищей, кто какую цифру любит. Пусть один из них назовет вам цифру 4. Предложите ему 4 умножить на 9, а затем на получившееся произведение умножить число 12 345 679. В результате у него получится число 444 444 444, т. е. число, записанное с помощью

только любимой им цифры. Если кто-нибудь скажет, что он любит 8, то предложите ему 8 умножить на 9, а затем умножить число 12 345 679 на получившееся произведение 72. У него получится число, записанное с помощью лишь любимой им цифры 8. Если же кто-нибудь назовет вам 0, то скажите, что 0, конечно, очень важная цифра, но лично вы ее недолюбливаете, и попросите назвать другую цифру.

Постарайтесь разгадать «секрет» этого развлечения и объясните его вашим товарищам.

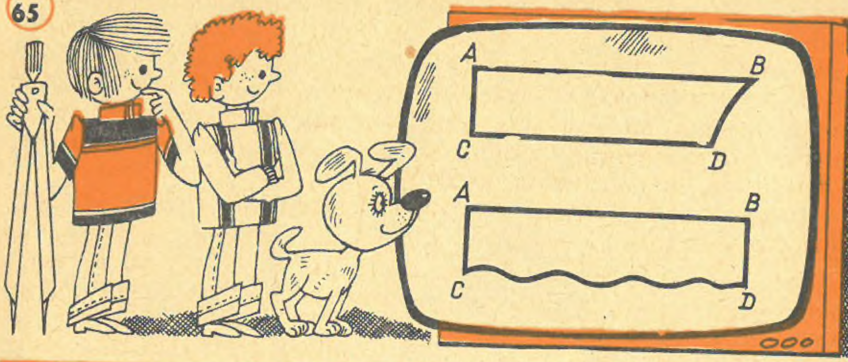
872. **Как я узнаю?** Номер дома, в котором вы живете, умножьте на 4, к результату прибавьте 7, полученное число умножьте на 25, прибавьте к полученному произведению свой возраст (целое число ваших лет) и число 125. Скажите мне, какое у вас получилось число, и я назову вам номер дома, в котором вы живете, и сколько вам лет. Как я все это узнаю?

873. **Сколько братьев и сколько сестер?** Вы можете узнать, сколько братьев и сколько сестер у вашего товарища. Пусть он прибавит к числу братьев 3, полученное число умножит на 5, к полученному произведению прибавит 20, сумму умножит на 2, прибавит число сестер и еще 5. По названному результату этих вычислений вы можете легко установить, сколько братьев и сестер у вашего товарища. Как вам это сделать?

874. **Угадайте задуманный час.** Воспользуйтесь картонной моделью циферблата часов. Пусть ваш товарищ задумает, который час (1, 2, 3, ... 12). Объясните, что вы указкой будете показывать числа на циферблате. Каждый раз ваш товарищ должен прибавлять сначала к задуманному им часу единицу, затем к получившейся сумме единицу и так далее. Когда у него получится 20, он должен сказать «стоп». В этот момент ваша указка должна показать задуманный товарищем час. Чтобы это случилось, поступайте так. Первые 7 раз показывайте какие угодно числа на циферблате часов. В восьмой раз покажите 12, а дальше показывайте по порядку 11, 10, 9 и так далее. Найдите объяснение.

875. **Быстрое извлечение кубического корня.** Пусть ваш товарищ возведет в куб какое-нибудь двузначное число и сообщит вам результат. Вы можете быстро узнать, какое именно число возводилось в куб (извлечь кубический корень). Для этого вам понадобится таблица кубов однозначных чисел: $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$. Вам достаточно запомнить цифровое окончание каждого из правых чисел и соответствующее основание куба. Поступайте так. Названное вам число мысленно разделите на грани по 3 знака справа налево (левая грань может содержать и меньше трех знаков). По окончанию правой грани вы легко найдете цифру единиц искомого кубического корня. Цифра десятков корня находится по левой грани, с помощью таблицы кубов однозначных чисел. Приведем пример. Пусть

65



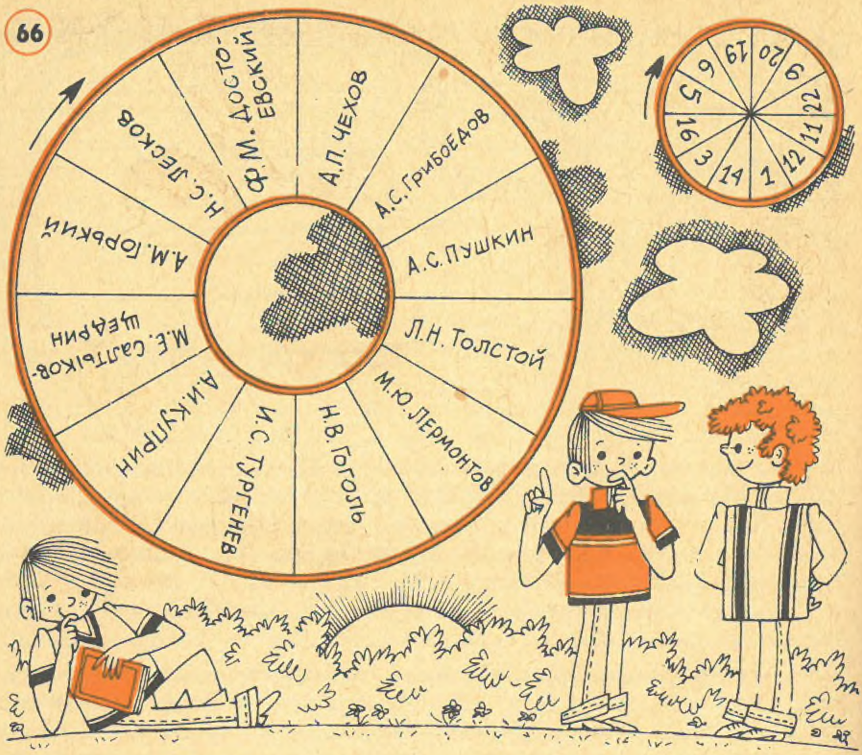
товарищ назовет вам число 571 787. Последняя цифра этого числа 7, следовательно, число единиц корня 3. Левая грань у нас 571, но число 571 заключено между числами нашей таблицы кубов 512 и 729, поэтому десятков в искомом корне 8. Товарищ возвел в куб число 83.

Прежде чем показывать свое умение извлекать кубические корни, потренируйтесь.

876. **Сравнение кривой и прямой.** Подготовьте две деревянные планочки (рис. 65), полоску бумаги и масштабную линейку. Покажите первую планочку своим товарищам и предложите на глаз сравнить длины двух прямолинейных краев ее. Задайте вопрос: на сколько сантиметров *AB* длиннее *CD*? Ответы запишите на доске, а затем предложите отвечающему произвести измерения. Обычно два отрезка прямой линии (тем более параллельные) сравниваются довольно точно. После этого покажите вторую планочку и спросите, на сколько сантиметров прямолинейный край ее *AB* короче криволинейного края *CD*. Обычно близких к действительности ответов не бывает. Допускаются грубые ошибки. Покажите это, воспользовавшись полоской бумаги и масштабной линейкой.

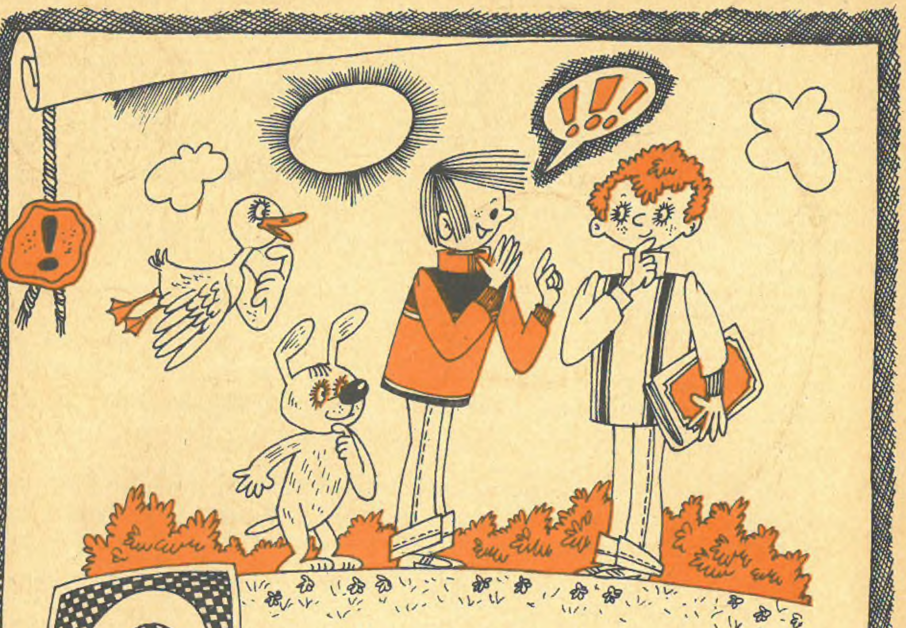
877. **Угадайте.** Сделайте из картона два круга, как показано на рисунке 66. Радиус большего круга пусть будет 20 см, а меньшего — 8 см. Меньший круг наложите на больший и скрепите их так, чтобы меньший круг мог поворачиваться вокруг общего центра их. С помощью двух этих скрепленных кругов вы можете отгадать, какого писателя задумает ваш товарищ.

Делается это так. Товарищ должен задумать одного из писателей, фамилии которых записаны в секторах большего круга; затем посмотреть, какое число стоит против этой фамилии на меньшем круге, и повернуть меньший круг в направлении, указанном стрелкой, на столько делений (частичных секторов), каково это число. Какое положение занимает вначале меньший круг — безразлично. На сколько делений повернет ваш товарищ меньший круг, вам также не нужно знать.



Чтобы угадать задуманного писателя, вам достаточно будет взглянуть, какое положение займет меньший круг. Против фамилии задуманного писателя будет стоять всегда число 12. Постарайтесь разгадать «секрет» этих удивительных кругов.

Вот еще один вариант таких кругов: с их помощью вы можете узнать, какие виды спорта любят ваши товарищи.

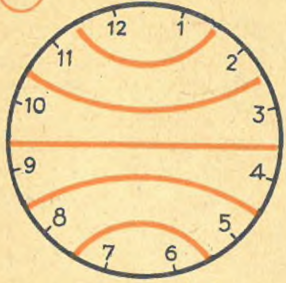


ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ГЛАВА I

8. 2. Указание. Искомое число равно $\frac{10^2+11^2+12^2}{365}+\frac{13^2+14^2}{365}=1+1=2$. **9.** 1) Перепишите сумму в таком виде: $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{10}$. **10.** 1) Частное равно $2\cdot3\times4\cdot6=144$, остаток равен 1. 2) 1. **11.** Рисунок 67. **12.** Например: 1) $\left(\frac{5}{5}\right)^5$; 2) $(5-5)^5$; 3) $(5+5):5$; 4) $(5\cdot5):5$. **13.** Например: $22+2+2+2$. **14.** Например: $\frac{222}{2}$. **15.** Например: 1) $99+\frac{9}{9}$; 2) $99+\frac{99}{99}$. **16.** Например: 1) $33-3+\frac{3}{3}$; 2) $3\cdot3\cdot3+3+\frac{3}{3}$; 3) $5\cdot5+5+\frac{5}{5}$. **17.** Например: 1) $111-11$; 2) $33\cdot3+\frac{3}{3}$; 3) $(5+5+5+5)\cdot5$. **18.** 123 –

67



$45-67+89$. 19. Например: $\frac{4+4}{4+4}$; $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$; $\frac{4+4+4}{4}$; $4+(4-4)\cdot 4$; $\frac{4\cdot 4+4}{4}$; $\frac{4+4}{4}+4$; $4+4-\frac{4}{4}$; $\frac{(4+4)\cdot 4}{4}$; $4+4+\frac{4}{4}$; $4+4+4-\sqrt{4}$. 20. Например: $0+1+2+3+4+5+6+7+8\cdot 9$. 21. Например: $2+2+2+2+2+2-2-2$. 22. $5+\frac{5+5+5}{5}$; $5\cdot\frac{5\cdot 5-5}{5}$. 23. 1) $1+2+34+56+7$; 2) $9+8+7+65+4+3+2+1$. 24. 0. 25. а) $2+2=2\cdot 2$; б) n и 1; $n+1>n\cdot 1$. 26. а) 36; б) 600. 27. $10^{20}=10^{10}\cdot 10^{10}>10^{10}\cdot 2^{10}$. 28. $100^{20}=100^{10}\cdot 100^{10}>90^{10}\cdot 100^{10}=9000^{10}$. 29. 35. 30. 1) 111; 2) 11^{11}. 31. $2-\frac{2}{2}$. 32. $(-9)^9$. 33. 1, 4, 5, 6, 9; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 1, 5, 6. 34. Нет. 35. 3^{33}, $4^{(4^4)}$. 36. $9^{(9^9)}$ — это число — великан среди чисел. Для обычной записи его требуется 369693100 цифр. 37. a^{n-1}, где $a^{n-1}\in N$; неверно говорить о дробном или отрицательном числе раз. 38. Бачок емкостью 20 л. 39. Каждый должен получить $\frac{5}{6}$ яблока, но $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. 3 яблока нужно разрезать пополам и 2 яблока — каждое на три равные части. 40. $\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. 41. 59. Если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться без остатка на 2, на 3, на 4, на 5, на 6. Наименьшее такое число $2\cdot 3\cdot 2\cdot 5=60$. Искомое число 59. 78. 5 ч. 79. Пионеры ехали на автомашине в 12 раз быстрее, чем шли пешком. 80. 2 кг. 81. Пирожное стоит 22 к., пирожок — 9 к. 82. I — 270 т; II — 130 т; III — 170 т. 83. У старшего 5 р. 60 к., у младшего 4 р. 84. 12 и 4. 85. 12 км/ч. 86. 7 слив. 87. 8 кг. 88. $\frac{1}{12}$. 89. 13 ч 20 мин. 90. Через 7 лет. 91. 51 и 17. 92. $2\frac{8}{11}$ м и $2\frac{8}{11}$ дм. 93. 60 и 40 билетов. 94. 15 пакетов по 3 кг и 9 пакетов по 5 кг. 95. 3 кг. 96. Через 4 мин. 97. 16 км. Указание. Второй догонит первого через 2 ч. За это время собака пробежит путь, равный 16 км. 98. Через 15 мин. 103. Длина поезда 225 м, скорость его 54 км/ч. 104. 400 км, 40 км/ч. 105. 4 ч 30 мин. 106. 50 мин. 107. I — $46\frac{1}{3}$ аршина; II — $34\frac{1}{3}$ аршина; III — $25\frac{1}{3}$ аршина. 108. 36 гусей. 109. 28 учеников. 110. $38\frac{14}{47}$ р. 111. Кроликов — 12, фазанов — 23. 112. За 12 ч; I — 30 четвертей; II — 27 четвертей; III — 24 четверти. 113. За $\frac{6}{11}$ ч. Указание. За 6 ч первая труба наполнит 6 таких водоемов, вторая — 3, а третья — 2, всего 11 водоемов. Значит, три трубы вместе наполнят один водоем за $\frac{6}{11}$ ч. 114. За 24 ч. 115. За 35 дней. 116. За 12 ч вол съест 12 копен, конь — 6, коза — 4, всего 22 копны. Поэтому одну копну вол, конь и коза вместе съедят за $\frac{6}{11}$ ч. 117. За 12 лет четыре плотника вместе могут построить 25 дворов, а один двор они построят за $\frac{365\cdot 12}{25}$, т. е. за $175\frac{1}{5}$ дня.

118. $9\frac{7}{37}$ дня. 119. За 15 мин. 120. По 285 верст. 121. В 8 дней. 122. 12,5. 123. 7 дынь. 124. 9, 4, 2 и 1. 125. 255. 126. 27. 127. 79. 128. 21 к. 129. 29 дней. 130. 59 мин. 131. Можно. Сначала нужно отлить 2 л в трехлитровый сосуд. Какими должны быть дальнейшие переливания, сообразить не трудно. 132. Сначала в третий сосуд нужно из первого отлить 3 л. Дальнейшее просто. 133. Сначала из первого сосуда следует отлить во второй 7 л, затем из второго 2 л в третий. 134. Следует в сосуд, емкость которого 4 л, набрать 1 л жидкости. Последующее не составляет труда. 135. Сообразите, как набрать в девятилитровый сосуд 8 л воды. 136. Позаботьтесь о том, чтобы в одном сосуде оказался 1 л воды. 137. Из сосуда в 12 л можно налить в девятилитровый сосуд любое натуральное число литров жидкости от 1 до 9, а в пятилитровый — от 1 до 5. 138. Надо наполнить 8-пинтовый сосуд, вылить из него 5 пинт в другой сосуд, а оставшиеся 3 пинты перелить в 5-пинтовый сосуд. Второй раз наполнить 8-пинтовый сосуд и отлить из него 2 пинты в 5-пинтовый сосуд. В 8-пинтовом сосуде останется 6 пинт.

139. 1) $11\frac{1}{9}$ $\left(33\frac{1}{3}\% \text{ — это } \frac{1}{3}\right)$; 2) 100; 3) 4,25 (вычислить 17% от 25 — это то же, что вычислить 25% от 17); 4) 9 (можно заменить вычислением 12,5% от 72, а 12,5% равно $\frac{1}{8}$). 140. 67%. 141. 31,5%. 142. На 32%. 143. Товар подешевел на 1%. 144. На 50%. 145. На 28,6%. 146. На 25%. 147. На $33\frac{1}{3}\%$. 148. 83,6%, 16,4%. 149. Второй. Указание. Скорость первого рабочего равна $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}=\frac{99}{100}$ скорости второго. 150. На 21%. 151. На 32%. 152. Уменьшится на 9%. 153. На 72,8%, на 44%. 154. На 8,9%. 155. 441 г. 156. $12\,345\,679\times\times 24=296\,296\,296$. 157. 1) $37\cdot21=777$ или $15\cdot37=555$; 2) $256\cdot13=3328$; 3) $37\cdot99=3663$; 4) $209\cdot209=43\,681$; 5) $153\cdot153=23\,409$; 6) $5291\cdot189==999\,999$. 158. 1) $6+67+674=747$; 2) $342\,457+342\,457=684\,914$; 3) $364\,768+364\,768=729\,536$; 4) $2222\cdot222=493\,284$; 5) $3125:25=125$; 6) 198; 7) 4 748 253. 159. $9382+3152=12\,534$. 160. 1) $90\,909+10\,101=101\,010$; 2) $769-504=265$; 3) $769+504=1273$; 4) $10\,652-9067==1585$; 5) $87\,130+8213=95\,343$.

161.

1)	2)	3)
$7\times29=203$	$22\times13=286$	$21\times17=357$
$+\quad\times\quad-$	$+\quad\times\quad-$	$+\quad\times\quad-$
$8+6=14$	$97+5=102$	$96+8=104$
$15+174=189$;	$119+65=184$;	$117+136=253$.

162. 1) $3328:13=256$; 2) $19\,275:75=257$; 3) $15\,625:25=625$. 163. 1) $6750--3894$; 2) $44{,}45+59{,}27+78{,}43$; 3) $27\cdot32$; 4) $66\cdot111$; 5) $324\cdot57$; 6) $568\times\times24$; 7) $315\cdot41$; 8) $40{,}5\cdot2{,}07$; 9) $48\,384:126$; 10) $52\,650:325$; 11) $1\,089\,700::12$; 12) $110\,768:112$. 164. $\frac{1}{2}$. 165. Когда делитель равен 1. 166. Делится на 7, 11 и 13. 167. 1 001 001. 168. Сумма двух последовательных чисел может быть простым числом, в остальных случаях — составное число. 169. 2 — простое четное число. 170. 3. 171. а) 6; б) 3; в) 3. 172. Не делится. 173. 4. 174. 2. 175. 100. 176. $|a|<2$, или $a^2<4$. 177. 1. 178. 0,0001 га. 179. 70 км, если велосипедисты ехали по прямолинейной дороге. 180. 297 м. 181. На 20 тетрадей. 182. 90 к. 183. 2. 184. 90 ступеней. 185. 3,5 л. 186. На 4 км/ч.

68

+2	−1	+4
−3	−5	−7
+6	−9	+8

69

−1	−3	+8
−4	+5	−7
+2	−6	−9

70

2^2	2^7	2^6
2^9	2^5	2^1
2^4	2^3	2^8

187. За 2,4 мин. 188. Не менее одной (мотоцикл двигался в поселок). 189. Задачу можно истолковать так: дед, отец, сын: всего 3 человека. 190. Велосипедисты встретятся на одном и том же расстоянии от A. 191. Иногда обыкновенной дробью выражают нумерацию углового дома квартала (числитель — номер этого дома по одной улице, знаменатель — номер его по другой улице). Такую дробь сокращать нельзя. 192. 6. 193. 10,5 к. и 0,5 к. 194. 11 с. 195. 36; 24. 196. 0. 197. 0. 198. Все эти равенства можно истолковать на «языке» часов. 199. 4 (или немного больше). 200 Например: первому дать 2 яблока, второму — 1 и третьему — 1. 201. 1,5. 202. $3\cdot 45 = 135$, или $3\cdot 40 + 5 = 125$. 226. Рисунок 68. 227. Рисунок 69. 229. 1) $a = 0$, $b \neq 0$; 2) $a = b$; 3) $a = -b$; 4) $a > b > 0$ или $a < b < 0$; 5) $0 < a < b$ и $b < a < 0$. 230. Рисунок 70. 239. При основании 4. 240. Верно в системе счисления при основании 8. 241. 1) 34311_5; 2) 102220_3; 3) 1000000_2. 242. 1) 37; 2) 410; 3) 12 925; 4) 2594. 1) В 6 раз; 2) в 216 раз. 244. 1) Уменьшится в 3 раза; 2) уменьшится в 27 раз. 245. 1) При основании 3: 2) при основании 6; 3) при основании 8. 246. 1) $3_{10} = 3_8$; 2) $14_{10} > 14_8$; 3) $111_2 < 111_8$; 4) $0{,}11_2 > 0{,}11_{10}$; 5) $0{,}21_{10} < 0{,}21_8$; 7) $0{,}2_8 > 0{,}1463_8$; в случаях 6), 8), 9) дроби равны. 247. 1) 10100000_2; 2) 101011111_2; 3) 11113_5; 4) 1011001_2; 5) 12313_5; 6) 22117_8; 7) 16303_8; 8) 2222_3; 9) частное — 1101_3, остаток 22_3. 248. 1) При основании 5; 2) при основании 9. 249. 1) При основании 5; 2) при основании 8; 3) при основании 8; 4) при основании 7. 250. $5\cdot 5 = 31$, основание системы счисления 8. 251. Будет. 252 В разных системах счисления признаки делимости чисел, вообще говоря, различны. 253. 1) 1000_2; 2) $0{,}11_2$; 3) $0{,}10011001100..._2$; 4) $0{,}12_3$; 5) $0{,}202020..._3$. 254. $\frac{7}{16} = 0{,}0111_2$; $\frac{1}{3} = 0{,}010101..._2$; $\frac{4}{5} = 0{,}11001100..._2$. 255. $\frac{4}{27} = 0{,}11_3$; $\frac{4}{5} = 0{,}21012101..._3$. 258. 15 лет, 7-й класс. 259. Наиболее экономична — троичная система ($2^{30} < 3^{20}$; $3^{20} > 4^{15}$: $4^{15} > 10^6$). 260. 2) Цифры 0, 1, 2, базис — числа 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100; 3) 1011011, 1121120, 111101; 4) 210 г, 26 г, 165 г. 261. 1) Цифры 0, 1, 2, 3, 4; базис — все заданные достоинства монет; 2) 2232001, 20001100, 10100010; 3) 94 к., 56 к., 90 к. 262. 1) Цифрами первых двух разрядов служат натуральные числа от 0 до 59, третьего — от 0 до 23, четвертого — от 0 до 30; пятого — от 0 до 11, шестого — от 0 до 99, седьмого — 0 и элементы множества натуральных чисел. 265. $88 + 8 + 8 + 8 + 888$. 269. Через 6 дней. 270. 1-е взвешивание — 4,5 и 4,5 кг крупы; 2-е — 2,25 г и 2,25 кг; 3-е — 2 кг крупы и гирь на 250 г на одной чашке, на

другой — 2,25 кг крупы. Возможны и другие решения. 271. В первый и во второй магазины следует завезти 3 полные бочки, 1 заполненную наполовину и 3 пустых, остальные бочки — в третий магазин. 272. 45. 273. Не делится. 274. $8a$ ($a=0, 1, 2, \ldots, 6$). 275. Не может. Указание. Если бы сумма $1+2+$ $+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ оканчивалась цифрой 7, то $k(k+1)$ оканчивалась бы цифрой 4. Но $k(k+1)$ может оканчиваться лишь цифрами 0, 2 и 6. 276. Остаток 5. 277. Произведение двух натуральных чисел, сумма которых меньше 13, будет наибольшим, когда каждое из этих чисел равно 6. 278. Из четырех натуральных чисел, сумма которых нечетна, нечетными могут быть одно или три. Произведение в этих случаях будет четным числом. 279. Сумма цифр данного числа — 300 — делится на 3 и не делится на 9, поэтому само число делится на 3 и не делится на 9, т. е. не может быть квадратом натурального числа. 280. 901. 281. 3. 282. 21. 283. $2^{2^{22}}$. 284. $9^{(9^9)}$. 285. $B \leqslant 9 \times 1984 =$ $=17\,856$, т. е. B — не более чем пятизначное число. Поэтому $C \leqslant 9 \times 5 = 45$ и делится на 9 (так как на 9 делятся A и B). Возможные значения C — 9, 18, 27, 36 и 45. 286. 1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг. 287. 61 981. 288. 504. 289. 8; 12; 5; 20. 290. 801. 291. 60 129. 292. 1) 45; 2) 81. 293. 1) $\frac{22}{35}=\frac{110}{175}>\frac{110}{177}$; 2) $\frac{1983}{1984}<\frac{1984}{1985}$. 297. 424. 298. 1794. 299. 1) $(10+1)(2+1)=33$; 2) $3 \cdot 4 \times$ $\times\ 6=72$.

ГЛАВА II

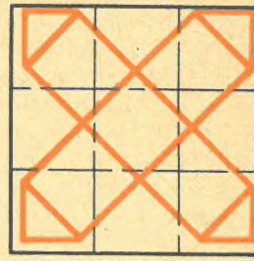
302. Верны высказывания: 1); 2); 3); 4), 5 б) и в); неверны 4 а) и г), 5). 303. 1) ложно; 2) и 3) истинны. 307. Верны утверждения: 6), 7), 8), 10), 14), 16), 17); неверны: 1) 2), 3), 4), 5), 9), 11), 12), 13, 15). 309. 1), 3), 6), 8), 10), 12), 15) достаточно; 2), 5), 9), 11) необходимо, 4), 7), 13), 14), 16) необходимо и достаточно. 310. 1) Если в одной и той же или равных окружностях дуги, меньшие 180°, равны, то и стягивающие их хорды равны. 2) Если в одной и той же или в равных окружностях хорды, отличные от диаметра, равны, то и стягиваемые ими дуги, меньшие 180°, равны. 315. Верно. 316. Верны. 317. Верны. 318. Неверна. 319. Такие треугольники могут быть равными, но могут быть и неравными. 320. Неверно. 321. Противоположное и обратное утверждения неверны. 322. Например, «смежные углы равны» и «два несмежных угла не равны». 323. Например, «смежные углы равны» и «два равных угла смежные». 324. Произведение — четное число. 325. Неверно. 327. Сумма двух чисел — четное число; трех — нечетное. 329. Может получиться и верное равенство. 330. Если бы в каждом классе учились по одному ученику, то учеников было бы 12. На самом же деле их 13. Пришли к противоречию. 331. 332. Задачи решаются аналогично предшествующей. 333. 3 яблока. 334. 1) 12; 2) 7. 338. Стоимость всей покупки должна делиться на 3, покупалось 9 тетрадей, 3 карандаша, а каждый блокнот стоил 6 к. Но 58 не делится на 3. 339. Четыре года тому назад всем членам семьи было на 15 лет меньше (73 — 58), а не на 16. Значит, самого младшего члена семьи (сына) еще не было. Следовательно, сыну сейчас 3 года, дочери 5 лет, матери 31 и отцу 34 года. 340. Первый. 341. Каждое из этих чисел не больше 10,

(3024 < 10 000). Среди этих чисел нет 5 и 10. Поэтому искомыми числами могут быть 1, 2, 3, 4 или 6, 7, 8, 9. Условию удовлетворяют числа 6, 7, 8 и 9. 342. Гири по 2 г, 13 г, 19 г и 60 кг. 343. Нужно выдать 2 ящика по 16 кг и 4 ящика по 17 кг ($16 \cdot 2 + 17 \cdot 4 = 100$). 344. 4 деления: 1 см, 2 см, 6 см и 10 см. 345. Длина контура должна быть в 6 спичек, а ширина в 5 спичек. 346. Совет: на листе бумаги нарисуйте канал и бухту, вырежьте из картона «теплоходы» и передвигайте их. 347. 1) Можно поступить так: 4 яблока разрезать на половинки, 2 яблока — на четыре равные части и 1 яблоко — на 8 равных частей. 2) 3 яблока можно разрезать каждое на 4 равные части и 4 яблока каждое на 3 равные части. 348. Вначале оба мальчика переправляются на противоположный берег (B) и один из них остается на нем. Второй мальчик доставляет к колхозникам лодку и сам высаживается на берег (A). В лодку садится один колхозник и переправляется через реку. Мальчик, оставшийся на берегу B, приводит лодку к берегу A, сажает в нее второго мальчика, переправляется с ним на берег B и т. д. 350. Из одного куска проволоки изготовить каркасную модель куба нельзя. Придется припаять 3 ребра и спаять еще 2 вершины. 351. От шахматной доски отрезаны 2 черные или 2 белые клетки, так что черных и белых клеток осталось разное число. Кость домино покрывает одну черную и одну белую клетку. Поэтому заданное покрытие невозможно. 352. Надо отделить второй перевязкой бобы от риса так, чтобы, развязав потом одну перевязку, можно было высыпать бобы, оставив в мешке рис. 353. Измерить диагональ основания кирпича, построить прямоугольный треугольник (для построения прямого угла можно воспользоваться тем же кирпичом) с катетами, длины которых равны длинам измеренной диагонали и толщины кирпича. Останется измерить длину гипотенузы этого треугольника. 354. Объяснение может быть таким: «Перед уходом к приятелю я завел свои часы и заметил их показания. Вернувшись, я снова посмотрел на свои часы. Сравнив первое и второе их показания, я установил, сколько прошло времени, затем вычел время пребывания в квартире приятеля и разность разделил на 2. Дома я поставил свои часы так, чтобы их показание было равно сумме времени, показанного часами приятеля при моем уходе от него, и результата моих вычислений».

355. Ошибка была допущена завещателем. Он упустил из виду, что $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ в сумме составляют не 1, а $\frac{19}{20}$. 356. Букетики продавались одновременно по одинаковой, но меняющейся цене. Например, могло случиться так, что сначала в первом киоске продано 3, во втором — 5 и в третьем — 6 букетиков по 1 р. за букетик, а оставшиеся букетики продавались по 1 р. за 3 букетика. Тогда на каждый киоск приходится по 13 р. 357. Кузнец разъединил 3 звена одного обрывка цепи. Этими звеньями соединил затем оставшиеся 4 обрывка в одну цепь. 358. Каждое звено трехзвенного обрывка цепи следует разрезать и соединить этими звеньями оставшиеся 4 обрывка. 359. Нужно распилить третье звено. 360. $\frac{60+60}{5} \cdot 2 = 48$, а не 50, расчет дежурного ошибочен. 361. Вожатый должен был точно указать, как пионеру-художнику поступить: нарисовать автопортрет или нет. 362. Коля рассуждал так: у Васи и Пети — красные квадратики. Значит, у меня может быть либо белый квадратик, либо красный. Если бы у меня был белый квадратик, то либо Петя, либо Вася быстро сообразил бы. что у него красный квадратик. Петя мог бы рассуждать так: у Коли

белый квадратик, а у Васи красный, значит, у меня красный, так как если бы у меня был белый, то Вася сразу бы сказал, что у него красный, потому что белых квадратиков всего два. Так же мог бы рассуждать и Вася. Но они молчат. Значит, у меня не белый квадратик, а красный. **363.** Требуемую развертку можно вырезать так, как показано на рисунке 71. **364.** 5 учащихся. **365.** 60%. **366.** 20, 13, 30 и 20. **367.** Не менее 10 детей. **368.** Да, в отчете есть ошибки. **369.** Возведение в квадрат денег не имеет смысла. В квадрат возводятся числа, а не величины. **370.** Нельзя делить на $7+2-9=$ $=0$. **371.** Ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества

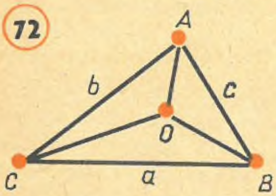
71



$4:4=5:5$. **372.** $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left|4-\frac{9}{2}\right|=\left|5-\frac{9}{2}\right|$. **373, 374.** Ошибка такого же вида, как и в задаче 372. **375.** Из равенства квадратов двух чисел не следует, что сами эти числа равны. **376.** Уравнения данной системы несовместны. **377, 378, 379.** Ошибка, как и в задаче 372. Нельзя делить на $a-b$, так как $a-b=0$. **381.** Нельзя делить на $b-a-c$, так как $b-a-c=0$. **382.** Ошибка, как и в задаче 372. **383.** Свойство: если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то и предыдущий член второго отношения больше своего последующего — может оказаться неверным, если некоторые члены пропорции отрицательны. **384.** При делении обеих частей неравенства $(a+b)(a-b)>2b(a-b)$ на $a-b$ знак неравенства может измениться на противоположный (если $a-b<0$). **385.** Нельзя делить на $a-a=0$. **386.** Ошибка, как и в задаче 372. **387.** $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ следует не $1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$, а $-1+\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$. Всегда $\sqrt{a^2}=|a|$. **388.** Рассуждения опирались на ошибочный чертеж. В действительности полуокружности пересекаются со стороной AC в одной точке, т. е. BE совпадает с BD. **389.** $D\in OB$. **390.** $D\in AB$. **391.** Случаи, рассмотренные в рассуждении, невозможны. Выполните чертеж с помощью циркуля и линейки. **392, 393, 394.** Ошибочные чертежи. **395.** Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники не обязаны быть равными. **396.** Ошибочен чертеж. Точка пересечения прямой, определяемой биссектрисой BD и серединного перпендикуляра к катету AC, находится вне треугольника ABC. **397.** Мы воспользовались недоказанным утверждением: «Сумма внутренних углов любого треугольника постоянна». **398.** (1) и (4) части прямоугольника (отличного от квадрата) неплотно примыкают ко (2) и (3) частям его. Между ними образуется «щель» в виде вытянутого параллелограмма. Площадь этой щели как раз равна 1 квадратной единице. **399.** Отрезок A_1B_1 имеет длину, превосходящую длину окружности меньшего круга, так как меньший круг покатится по прямой A_1B_1 со скольжением. **400.** Нельзя делить на $AE\cdot DE-$ $-CE\cdot BE$, потому что эта разность равна 0. **401.** Используя (1) и (2), можно доказать, что $z=x$ (докажите!) и, следовательно, $z-x=0$. Поэтому деление на $z-x$ недопустимо. **402.** Формула $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ выводится на основании теоремы Пифагора, и поэтому в рассуждении получается порочный круг. **403.** Деление на $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ недопустимо, так как $x=y$, и поэтому $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$.

404. $(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} = |\cos x|^3$. **407.** Верное решение у первого ученика. Второй ученик при возведении в квадрат обеих частей уравнения приобрел посторонний корень $x = -6$, поэтому его решение следует завершить проверкой корней. **408.** Верно вычислял второй ученик. Ошибка первого ученика $\sqrt{(1-n)^2} \neq 1 - n$, так как $n = 3 > 1$, то $\sqrt{(1-n)^2} = n - 1$. **409.** $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 \neq$ $\neq \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2}$. По определению квадратного корня, $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = -\frac{c}{a}$ (при $\frac{c}{a} \leqslant 0$). **411.** Рассуждение ошибочно. (Сравните с рассуждением: если стол дубовый, то он деревянный; этот стол не дубовый, следовательно, он не деревянный.) **412.** Доказательство Вити верно только для найденного им способа построения. А если прямую, параллельную данной, построить иным способом? Совпадут ли построенные прямые? — вопрос остается открытым. **415.** 3 мин. **416.** Достаточно двух носильщиков. Первый из них должен возвратиться после первого дня пути, а второй — после второго, оставив себе необходимый запас пищи и воды, передав остальное оставшимся. **417.** Если при первом измерении масса груза оказалась равной p г, а при втором — q г, то верная масса равна $\sqrt{pq}$. **418.** Хозяйка отвесила более 2 кг. Пусть a — действительная масса крупы, отвешенной в первый раз, и b — во второй. По предшествующей задаче $\sqrt{ab} = 1$. Имеем: $a \neq b$ и $a + b = \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} =$ $= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} > 2$. **419.** Перестановку шин нужно произвести через 9375 км пути. Грузовик без замены шин новыми пройдет всего 18 750 км. **420.** Пусть x (км) — расстояние от школы до селения A, y (км) — до B и z (км) — до C. Все школьники за один раз пройдут $300\,x + 200\,y + 100\,z$ (км). Но $300\,x + 200\,y + 100\,z = 200\,(x + y) + 100\,(x + z)$. Учтем, что $x + y \geqslant |AB|$, $x + z \geqslant |AC|$. Имеем: $300\,x + 200\,y + 100\,z \geqslant 200 \cdot |AB| + 100 \cdot |AC|$. Сумма, стоящая в левой части неравенства, будет наименьшей при $x + y = |AB|$ и $x + z = |AC|$, т. е. при условии $\begin{cases} x + y = 4. \\ x + z = 5. \end{cases}$ Это условие означает, что школу нужно построить в селении A. **421.** (Рис. 72.) Возможны 6 маршрутов, длины которых равны: $S_1 = OA + c + a + CO$; $S_2 = OA + b + a + OB$; $S_3 = OB + a + b + OA$; $S_4 = OB + c + b + CO$; $S_5 = OC + b + c$; $S_6 = OC + a + c + AO$. Очевидно, что $S_1 = S_6$, $S_2 = S_3$, $S_3 = S_4$. Остается сравнить 3 маршрута: S_1 S_2 и S_4, что можно сделать графически (по рисунку, выполненному с помощью чертежных инструментов). **422.** Порядок изготовления книг должен быть таким: B, A, C. Потребуется 10 ч. **423.** Лента намотается спиралеобразно. Для расчетов, с достаточной для практики точностью, можно считать, что получается несколько концентрических цилиндрических слоев. При расчете длины каждого такого кольца можно исходить из длины средней окружности его. Тогда колец будет $\frac{130-30}{2 \cdot 0{,}25} = 200$, диаметр средней окружности первого (наименьшего) кольца равен $30 + 2 \cdot \frac{0{,}25}{2} = 30{,}25$ мм, диаметр средней окруж-

72



ности второго кольца будет 30,75 мм (увеличится на 0,5 мм) и так далее. Диаметр средней окружности последнего кольца 129,75 мм. Длины всех этих окружностей составляют арифметическую прогрессию: $\pi \cdot 30{,}25$; $\pi \cdot 30{,}75$; $\pi \cdot 31{,}25$; ...; $\pi \cdot 129{,}25$; $\pi \cdot 129{,}75$. Сумма их равна $l = \pi \cdot 16\,000 \approx 50\,250$ (мм). Значит, лента должна иметь длину 50 м 25 см. 424. 25 ящиков по 40 деталей и 4 ящика по 25 деталей. 425. 25 путевок на 45 дней, 2 путевки на 27 дней и 20 путевок на 15 дней.

ГЛАВА III

426. 176 экскурсантов. 427. 4 брата и 3 сестры. 428. 4 р. 80 к. 429. 48 км/ч. 430. 3 ветки и 4 галки. 431. 84 года. 432. 8 р., 12 р., 5 р. и 20 р. 433. 120. 434. 15. 435. 50 и 14 лет. 436. 18 лет. 437. Через $65\frac{5}{11}$ мин. 438. Через $21\frac{9}{11}$ мин. 439. $1\frac{1}{9}$ км. 440. 85 714. 441. 4. 442. Нужно из результата вычислений вычесть 4 и разность разделить на 2. 443. Результат вычислений (до деления на 10): $1000a + 100b + 10c$; задуманное число $100a + 10b + c$. 444. Мальчиков — 4, девочек — 6. 445. По условию составляется система двух уравнений с тремя переменными:
$\begin{cases} 3x + 5y + 25z = 100, \\ x + y + z = 20, \end{cases}$ где x — число денежных знаков по 3 р., y — по 5 р. и z — по 25 р.
Исключив x, получим $y + 11z = 20 \Leftrightarrow y = 20 - 11z$. Но $0 \leqslant y \leqslant 20$. Значит, $z = 0$ или $z = 1$. Имеем два решения: 1) $x = 0$, $y = 20$, $z = 0$ или 2) $x = 10$, $y = 9$, $z = 1$. 446. Задача имеет два решения: 1) 3 тетради по 7 к. и 8 по 4 к.; 2) 7 тетрадей по 7 к. и 1 тетрадь по 4 к. 447. Пешеход. 448. 5 девочек, 24 гриба. 449. 27 км/ч. 450. ≈ 1800 км. 451. 80 см. 452. 1) 705,6 м; 2) $\approx 20{,}1$ с. 453. 13. 455. $\approx 59\%$. 456. 20 коров. 457. 37. 482. 3) $7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2} = \left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(7 - \frac{1}{2}\right) = 7^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 48\frac{3}{4}$; 4) $143\frac{15}{16}$; 5) $98^2 - 4 = (98 - 2) \times \times (98 + 2) = 9600$; 6) 2; 7) $\frac{106}{47} - \frac{94}{53} = 2\left(\frac{53}{47} - \frac{47}{53}\right) = 2\,\frac{53^2 - 47^2}{(50 - 3)(50 + 3)} = \frac{1200}{2491}$; 8) $199 + 195 + 191 + \ldots + 7 + 3 = (3 + 199) \cdot 25 = 5050$ (сначала пользуемся тождеством $a - b^2 = (a + b)(a - b)$). 483. 1) -4; 2) 0; 3) 0; 4) 200. 484. Указание. Прежде сократите дробь. 3) Не существует. 485. $4ab$. 486. $\frac{32}{1 - a^{32}}$. 489. $2^2 \times 3^4 = 648$. 490. $\sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$. 492. 16 807 мер. 493. 20 971 р. 52 к. 494. 655 р. 35 к. 495. Такого числа не существует. 499. В безветренную погоду полет проходит быстрее. Указание. Пусть расстояние между Москвой и Киевом a (км), собственная скорость самолета v (км/ч), а скорость ветра u (км/ч). Время полета туда и обратно в безветренную погоду будет равно $\frac{2a}{v}$ (ч), а при ветре $\frac{a}{v + u} + \frac{a}{v - u}$ (ч). Но $\frac{2a}{v} < \frac{a}{v + u} + \frac{a}{v - u}$ (докажите!). 500. 37,5 км/ч. Указание. Обозначьте расстояние между городами через a (км). Туда и обратно автомобиль проедет за

$\frac{a}{50}+\frac{a}{30}$ (ч), его средняя скорость $\frac{2a}{\frac{a}{50}+\frac{a}{30}}=\frac{2a}{\frac{8}{150}a}=\frac{150}{4}=37{,}5$ (км/ч).

501. 81^{10}. Указание. Представить $80=81-1$, а $82=81+1$, затем раскрыть скобки и привести подобные члены. 502. $x^x+x^{1-x}=x+1 \Leftrightarrow x^{2x}-xx^x+x-x^x=0 \Leftrightarrow (x^x-1)(x^x-x)=0 \Leftrightarrow x=1$. 503. В V и VII классы. 504. 954. 505. $(2n-1)^2=2(2n^2-2n)+1$. 506. Само число не может быть нечетным, так как тогда квадрат его был бы нечетным числом (см. задачу 505). 507. $(2n)^2=4n^2$. 508. $(n+1)^2-n^2=2n+1$. 509. $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$. 510. Числа: $n-1$, n, $n+1$. Сумма кубов их равна $n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1=3n(n^2+2)$. Докажем, что $n(n^2+2)$ делится на 3. Имеем три возможности: 1) $n=3k$; 2) $n=3k+1$; 3) $n=3k+2$. При первой возможности на 3 делится n; при второй — $(3k+1)(9k^2+6k+3)=(3k+1)\cdot 3\times(3k^2+2k+1)$; при третьей — $(3k+2)(9k^2+12k+6)=(3k+2)\cdot 3\cdot(3k^2+4k+2)$. 511. $n(n+1)+n+1=(n+1)^2$. 512. $2n(2n+2)=4n(n+1)$. Одно из чисел n или $n+1$ четное. Поэтому $4n(n+1)$ кратно 8. 513. Пусть ab — двузначное число и $a\neq b$. Тогда $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$. В случае трехзначного числа соответствующая разность будет делиться на 99. 514. $1+3+5+7+\ldots+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)=2n\cdot\frac{n}{2}=n^2$. 515. $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$; $35^2=1225$; $55^2=3025$; $125^2=15\,625$. 516. $n(n+1)(n+2)$. Одно или даже два из этих чисел четные и одно обязательно кратно 3. 517. Первое из этих чисел четное, второе нечетное и третье четное. Одно из этих двух четных чисел делится на 4, другое — на 2. Кроме того, одно из трех последовательных натуральных чисел делится на 3. Произведение этих чисел делится на 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24. 518. $m^3-m=m(m+1)(m-1)=(m-1)m(m+1)$. Далее см. задачу 516. 519. $m^2-1=(m-1)(m+1)$. При нечетном m это произведение двух последовательных четных чисел, оно кратно 8 (см. задачу 517). 520. $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Далее решение аналогично тому, как в задаче 521. $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Произведение $(n-1)n(n+1)$ делится на 2, на 3 и, следовательно, на 6; n^5-n делится на 5 и при $n=5k$, $n=5k+1$, $n=5k+2$, $n=5k+3$, $n=5k+4$, что устанавливается подстановкой (см. задачу 510). 522. $a^4-1=(a^2+1)(a-1)(a+1)$; $a-1$ делится на 5 при $a=5n+1$, a^2+1 при $a=5n+2$ и при $a=5n+3$, $a+1$ — при $a=5n+4$. 523. См. задачи 517—519. 524. $7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^n=(7(1+7+7^2+7^3)+7^5(1+7+7^2+7^3)+\ldots+7^{4n-3}(1+7+7^2+7^3)=400(7+7^5+7^9\ldots7^{4n-3})$. 525. 14; 28. Указание. Пусть искомое число $\overline{ab}=10a+b$. По условию $a=\frac{10a+b}{14}$, или $4a=b$. Составьте табличку возможных значений a и b. 526. Возможные последние цифры чисел a^8, b^8 и c^8 при $a, b, c\in N$ — 1, 5 и 6. Сумма никакой комбинации трех таких цифр не равна 9. 527. $(4n+1)(4m+1)=4(4mn+m+n)+1$. 528. $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n=[(n+1)^2+1]\cdot[(n-1)^2+1]$. 529. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+2abcd-2abcd=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$. 530. $121=(10+1)^2$, $12\,321=(10^2+10+1)^2$, $1\,234\,321=(10^3+10^2+10+1)^2$ и т. д. 531. Для $n\geqslant 3$ имеем: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$, но $5(n^2+2)$ является квадратом нату-

рального числа лишь в том случае, когда n^2+2 кратно 5. В этом случае n^2 должно оканчиваться цифрой 3 или 8, что невозможно (окончания квадратов натуральных чисел 0; 1; 4; 5; 6; 9). **532.** $2n-1=n^2-(n-1)^2$. **533.** $4n=(n+1)^2-(n-1)^2$. **534.** $2a^2+2b^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$. **535.** $x^4-2x^3+6x^2+2x+1=x^4-2x^3+x^2+x^2+2x+1+4x^2=x^2(x-1)^2+(x+1)^2+(2x)^2$. **536.** $3a^4+1=(a^4-2a^3+a^2)+(a^4-2a^3+a^2)+(a^4-2a^2+1)=(a^2+a)^2+(a^2-a)^2+(a^2-1)^2$. **537.** $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, где a и b — данные целые числа. Так как $a+b$ кратно 10, то и a^2-b^2 кратно 10, т. е. a^2 и b^2 оканчиваются одной и той же цифрой. **538.** Возьмем числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, и так без конца. Каждое из них в 2 раза больше предшествующего и между соседними двумя такими числами, как доказал П. Л. Чебышев, содержится хотя бы одно простое число. **539.** Указание. Сгруппируйте все равные числа, получите n единиц, $n-1$ двоек и т. д. **540.** Если x, y и z — длины сторон пифагорова треугольника, то треугольник со сторонами kx, ky и kz, $k\in N$ также является пифагоровым, так как $(kx)^2+(ky)^2=(kz)^2$. **541.** 1) См. задачу 529. 2) Указание. Разложив числитель и знаменатель на множители, сократите левую дробь; 3) Указание. Знаменатель второй дроби преобразуйте к виду $\sqrt{1-x}\times(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$. **542.** Пусть x_1, x_2, x_3, ..., $x_{50}\in N$. Рассмотрим числа x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$, ..., $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{50}$. Всего их 50. При делении этих чисел на 50 могут получиться лишь остатки, не превосходящие 49. Если ни одно из этих чисел не разделится на 50 без остатка, то по меньшей мере два из них будут давать при делении на 50 один и тот же остаток (так как чисел 50, а остатков не больше 49). Разность между большим из них и меньшим (т. е. сумма нескольких из 50 чисел) разделится на 50 без остатка. **543.** Левую часть неравенства обозначим буквой A. $A^2=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\frac{9999^2}{10000^2}<\frac{1}{2^2-1^2}\times\frac{3^2}{4^2-1^2}\cdot\frac{5^2}{6^2-1^2}\cdots\frac{9999^2}{10000^2-1^2}=\frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot7}\cdots\frac{9999}{10001\cdot9999}=\frac{1}{10001}<\frac{1}{10000}$.

Следовательно, $A<0{,}01$. **544.** 1) Известно, что $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ при $a\geqslant0$ и $b\geqslant0$. Имеем: $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$; $b+c\geqslant2\sqrt{bc}$; $a+c\geqslant2\sqrt{ac}$. Перемножая почленно полученные неравенства, находим искомое. 2) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$. Далее воспользуйтесь неравенством $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. 3) $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(y^2+z^2)+\frac{1}{2}(z^2+x^2)$. Затем применить неравенство $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. 4) $x^2-2xy+2y^2-2x+3=x^2-2x\times(y+1)+(y+1)^2-(y+1)^2+2y^2+3=(x-y-1)^2+y^2-2y+1+1=(x-y-1)^2+(y-1)^2+1>0$. 5) Раскрыв скобки, сгруппируйте слагаемые в левой части неравенства и воспользуйтесь тем же неравенством. 6) $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2\geqslant0$. **546.** Пусть такое число $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$. Тогда $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}=1979\cdot\overline{a_2a_3\ldots a_n}$, т. е. $a_1\cdot10^n+\overline{a_2a_3\ldots a_n}=1979\cdot\overline{a_2a_3\ldots a_n}$, или $a_1\cdot10^n=1978\cdot\overline{a_2a_3\ldots a_n}$. Поэтому $10^n\cdot a_1=2\cdot23\cdot43\cdot\overline{a_2a_3\ldots a_n}$. Отсюда следует, что цифра a_1 должна делиться на 23 и на 43, что невозможно

($a_1 \leqslant 9$). Следовательно, n-значное натуральное число при зачеркивании его первой цифры уменьшиться в 1979 раз не может. 547. 1) $20:(5\cdot 2) + 6^2$; 2) $(20:5\cdot 2+6)^2$; 3) $20:5\cdot(2+6^2)$; 4) восстановление невозможно. 548. $(3a-2b)(3a+2b)=9a^2-4b^2$. 549. 1) $c+4a^2c^2-a$; 2) $0{,}8\ pq^2$. 551. $A=3{,}5$. 552. $\beta=6{,}8$. 553. 1) cx; 2) $-kp$; 3) $-n$; 4) yz. 554 $10\cdot 1-9=1$. 555. В системе счисления с основанием 7. 556. 45 656. 557. 142 857. 558. 301. 559. 27^6. 560. 41, 40. 561. 11, 10. 562. 185^2-15^2. 563. 48. 564. 405 450. Указание. Если первое трехзначное число a, то второе может быть: 000, 001, 002, ..., $999-a$ — всего $1000-a$ чисел. Но a может быть любым из чисел: 100, 101, 102, ..., 999. Следовательно, на вопрос задачи отвечает сумма: $900+899+898+\ldots+2+1=405\,450$. 565. 6 210 001 000. 566. $y=\frac{4}{3}x$. 567. $y=-2x+5$. 568. Линейная функция $y=ax+b$. 569. $y=x^2+2x+3$. 570. $y=2x^2-8x+12$. 571. 2. 572. $\frac{1}{3}<k<\frac{3}{2}$. 573. $q<3$. 574. $k=-\frac{2}{3}$. 575. 1) $k=1\frac{2}{3}$; 2) $k<1\frac{2}{3}$. 576. При $k>1$ и $k\leqslant 0$. 577. 1) x^2+x-2; 2) не существует. 578. $2(x-1)(x+2)(x+3)+8=2x^3+8x^2+2x-4$. 579. x^2+3x+1 582. Масса $\frac{\rho_1 m_2-\rho_2 m_1}{\rho_1-\rho_2}$, емкость $\frac{m_1-m_2}{\rho_1-\rho_2}$. 583. Первого металла $\frac{a-c}{b-c}\ m$, второго $\frac{b-a}{b-c}m$. 584. $729=27^2$. 585. 98. 586. $10a+b=a+b^2 \Leftrightarrow 9a=b(b-1)\cdot b=9$. Число 89. 587. 108. 588. $1979=1900+10\ a+b+1+9+a+b$, где a — цифра десятков, b — цифра единиц года рождения Тани. Тогда $11\ a+2\ b=69$ и a — нечетное, $0\leqslant b\leqslant 9$. Поэтому $a=5$, $b=7$. Год рождения Тани 1957. 589. См. задачу 588. 590. 1-й способ: 4 отрезка по 7 см и 6 отрезков по 12 см. 591. Павел. Семен поймал 21 рыбу, Павел и Игорь — по 7. 592. 60. 593. Пусть было x пионеров, y стульев и z табуреток. Тогда

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=39 \\ x=y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+5z=39, \\ x=y+z \end{cases}$$

и, очевидно, $y=4$, $z=3$. 594. 6 треугольников, 3 квадрата, 1 домик 595. $n=2$, число 178. 597. 36 слагаемых; число 666.

598. $$\begin{cases} a=nb, \\ a+b=m(a-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=nb, \\ b=ma-b(m+n) \end{cases} \Rightarrow n(m-1)=m+1.$$

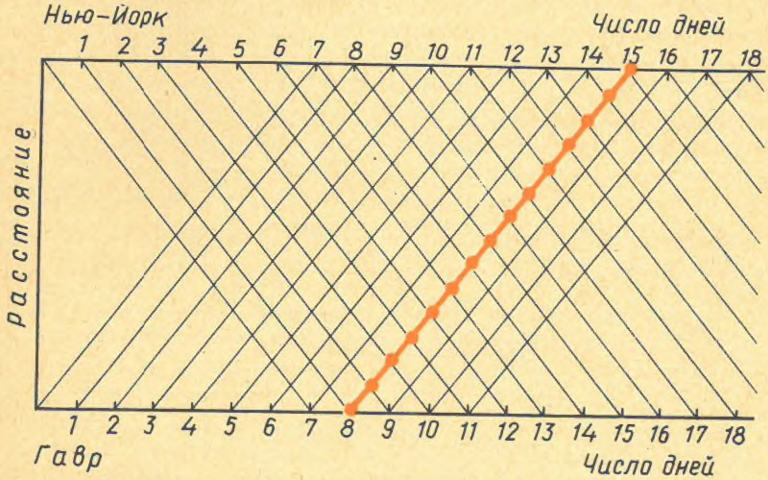
Ясно, что либо $m=2$, $n=3$, либо $m=3$, $n=2$, т. е. $m+n=5$. 599. 8. 600. 350. 601. Пусть цена арбуза x, дыни y, граната z. По условию задачи

$$\begin{cases} x+3y+5z=1{,}25, \\ 2x+2{,}5y+3z=1{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z=1{,}25, \\ 7x-7z=0{,}35 \end{cases}$$

и, следовательно, $x>z$. Арбуз стоит дороже граната. 602. $x^2-2xy=1978 \Leftrightarrow x(x-2y)=2\cdot 23\cdot 43$. Тогда либо $x=2k$ — четное число, либо $x-2y=2m$. При $x=2k$ $x-2y=2(k-y)$ — четное число, т. е. $x(x-2y)=4k(k-y)$, что неверно, так как правая часть не делится на 4. Аналогично при $x-2y=2m$. Уравнение не имеет решений в целых числах. 604. Обозначим числа x и y, тогда $x^2=y^3=a$ и a есть степень с показателем 6. Но $100\leqslant a\leqslant 10\,000$. Таких чисел два: $a\in\{3^6,\ 4^6\}$. Но 3^6 не является кубом двузначного числа ($3^6=9^3$). Поэтому $a=4^6$ и $x=64$, $y=16$. 605. Уравнение преобразуется к виду $x^2(a-b)-x(a-b)(a+b)=0$, т. е. при $a=b$ корнем его является любое действительное число, а при $a\neq b$ корни уравнения $x=0$ и $x=a+b$. Поэтому уравнение имеет единственный корень при $a+b=0$, т. е. $x=0$. 610. 3 кг.

611. 3 кг. 612. 5. 613. a^{n-1}. 614. 36. 615. 11, 19 и 14 книг. 616. Если сестре было x лет, когда она была вдвое моложе брата, то сейчас ему $4x$, а ей $3x = x + 2x$ лет. Составив и решив уравнение, получим: брату 40, сестре 30 лет. 617. Обозначив $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$, имеем: $a = bk$, $b = ck$, $c = ak$, т. е. $abc = k^3abc$. Поэтому $k = 1$ и $a = b = c$. 618. Пусть $10a + b$ — номер дома Коли. Значит, $10a + b - 10b - a = 9(a - b)$ — номер дома Пети. Но Петя сразу решил задачу, хотя единственное решение имеется лишь при $a - b = 8$, т. е. при $a = 9$ и $b = 1$. Значит, Коля живет в доме № 91. 620. 3155. 621. Степени чисел, оканчивающихся цифрой 3, имеют окончания 3, 9, 7, 1; степени чисел с цифрой единиц 7 имеют окончания 7, 9, 3, 1. $1999 = 1996 + 3 = 4 \cdot 466 + 3$. $1997 = 4 \cdot 466 + 1$. Обе данные степени имеют цифру единиц 7, поэтому их разность кратна 5. 622. $655 = 9 \cdot 73 + 8$. 634. $9:8 = 1{,}125$. 636. Через 9 мин после начала движения первого велосипедиста. 637. Через $8\frac{2}{11}$ м после начала движения первого велосипедиста. 638. 10 раз. 639. Через 1 ч 40 мин, $2\frac{1}{7}$ ч, 2 ч 30 мин после начала горения. 641. 15. В это число входят и те два парохода, с которыми встречается пароход в Гавре (в момент отхода) и в Нью-Йорке (в момент прихода). Указание. Задача изящно решается графически (рис.73).

73

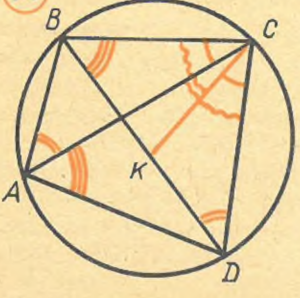


642. 1,11 м; 1,78 м; 2 м; 1,78 м; 1,11 м. 643. Длина стороны вписанного квадрата равна $\sqrt{x^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$, а площадь его $S = 2x^2 - 4x + 4$ (кв. ед.) $= 2[(x^2 - 2x + 1) + 1] = 2[(x - 1)^2 + 1]$. Наименьшее значение площади вписанного квадрата достигается при $x = 1$ и равно 2. 644. Контур квадрата со стороной 4 см. 645. Длина участка 50 м, а ширина 25 м.

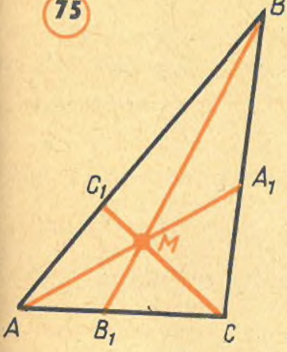
ГЛАВА IV

646. 30°. 647. а) 30°; б) 150°. 648. Задача имеет 3 решения: 1) 80°, 140°, 40°, 100°; 2) 40°, 160°, 20°, 140°; 3) 29°30′, 140°, 150°30′, 40° — это решение может быть найдено графически (с помощью построений) или с помощью тригонометрии. 649. $\frac{a-c+d-e+b}{2}$, $\frac{a+c+d+e-b}{2}$. 651. $\approx 7{,}5$ м. 652. 1,5 м. 653. Первая отливка имеет внутри пустоты, общий объем которых равен 0,03 дм^3. 654. 0,02 мм. 655. Длина ребра куба была бы больше 18 м, но меньше 19 м. 656. Останется без изменения. 657. 62, 5 г. 658. Площадь трех внутренних кругов больше. 659. Нет. 660. Нет. 662. Возьмем на плоскости две перпендикулярные прямые, параллельные звеньям данной ломаной. Звеньев ломаной, параллельных первой прямой, столько же, сколько звеньев, параллельных второй. Число всех звеньев, параллельных одной из прямых, четно. Поэтому число всех звеньев ломаной кратно 4. 663. Указание. Сумма расстояний от внутренней точки правильного многоугольника до прямых, определяемых сторонами его, равна произведению расстояния от центра многоугольника до стороны его на число сторон. Для доказательства достаточно записать площадь этого многоугольника двумя способами и сравнить записи. 665. Пусть $\triangle ABC$ — данный и O — точка пересечения его высот. Постройте точку O_1, симметричную точке O относительно стороны AB. Докажите что $\angle O_1BC + \angle O_1AC = 180°$, т. е. что точка O_1 лежит на окружности, описанной около $\triangle ABC$. Аналогично поступите с точками O_2 и O_3, симметричными точке O относительно AC и BC. 669. Можно воспользоваться поворотом данного треугольника вокруг, например, вершины A на 60°. Пусть таким способом получена точка M' из точки M, тогда $\triangle M'MB$ искомый, так как $|M'M| = |AM|$, $|M'B| = |CM|$. 670. Постройте точку M', центрально-симметричную точке M, относительно середины BC. $\triangle BM'M$ (а также MCM') искомый. 671. Пусть O_1 и O_2 — середины диагоналей и O — точка пересечения отрезков MN и PQ. Докажите, что $PMQN$ и PO_1QO_2 — параллелограммы с общим центром O; O_1O_2 — диагональ параллелограмма PO_1QO_2 — проходит через центр его O. 672. Пусть a, b — длины катетов и c — длина гипотенузы. Имеем: $c > a$ и $c > b$. Отсюда: $ca^2 > aa^2$ и $cb^2 > bb^2$, после сложения: $(a^2+b^2)c > a^3+b^3$ или $c^3 > a^3+b^3$. 673. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ — левые концы данных отрезков, а $B_1, B_{22}, B_3, \ldots, B_k$ — правые. Любая точка A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ лежит левее любой точки B_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, k)$ или совпадает с ней (в противном случае отрезки A_jB_j и A_iB_i не имели бы общих точек). Возьмем из точек A самую правую, а из B_j — самую левую. Получим отрезок (или точку в случае совпадения взятых точек), содержащийся в каждом из данных отрезков. 674. Рисунок 74. Строим $\angle DCK = \angle BCA$. $\angle CDK = \angle CAB$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. $\triangle CDK \sim \triangle CAB$, $\frac{|DK|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$, или $|DK| \cdot |AC| = |AB| \cdot |CD|$ (1). $\angle KCB = \angle DCA$ — по построению, $\angle KBC = \angle DAC$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу.

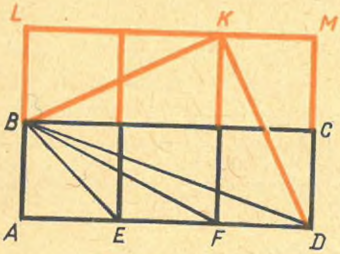
74



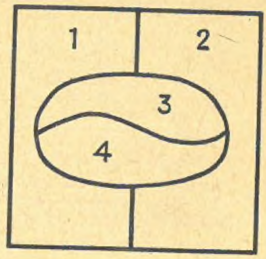
75



76



77



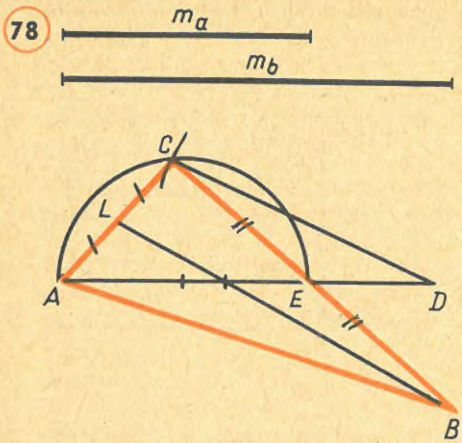
$\triangle CBK \infty \triangle CAD$, $\frac{|KB|}{|AD|}=\frac{|CB|}{|AC|}$, или $|KB|\cdot|AC|=|CB|\cdot|AD|$ (2). Из (1) и (2) находим: $|DK|\cdot|AC|+|KB|\cdot|AC|=|AB|\cdot|CD|+$ $+|CB|\cdot|AD|$, или $|AC|\cdot|BD|=|AB|\cdot|CD|+|CB|\cdot|AD|$

675. Рисунок 75. Очевидны пропорции: $\frac{S_{\triangle AMB_1}}{S_{\triangle B_1MC}}=\frac{|AB_1|}{|B_1C|}$, $\frac{S_{\triangle MA_1C}}{S_{\triangle BMA_1}}=$ $=\frac{|CA_1|}{|A_1B|}$, $\frac{S_{\triangle BMC_1}}{S_{\triangle AMC_1}}=\frac{|BC_1|}{|C_1A|}$. (Каждая пара треугольников имеет одну и ту же высоту.) Перемножая полученные равенства почленно, находим:

$$\frac{|AB_1|\cdot|CA_1|\cdot|BC_1|}{|B_1C|\cdot|A_1B|\cdot|C_1A|}=\frac{S_{\triangle AMB_1}\cdot S_{\triangle MA_1C}\cdot S_{\triangle BMC_1}}{S_{\triangle B_1MC}\cdot S_{\triangle BMA_1}\cdot S_{\triangle AMC_1}}=$$

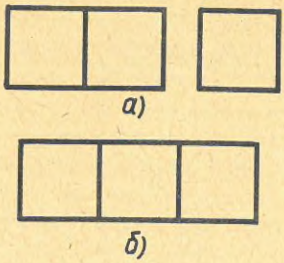
$$=\frac{|AM|\cdot|MB_1|\cdot|CM|\cdot|MA_1|\cdot|BM|\cdot|MC_1|}{|A_1M|\cdot|MB|\cdot|C_1M|\cdot|MA|\cdot|CM|\cdot|MB_1|}=1.$$

676. Целесообразно вспомогательное построение, показанное на рисунке 76. Прямоугольник $BLMC$ равен прямоугольнику $ABCD$; они составлены из равных квадратов. В $\triangle BKD$ $|BK|=|KD|$, $\angle BKD=90^\circ$. Значит, $\angle BDK=45^\circ$. Кроме того, $\angle AEB=45^\circ$, $\angle AFB=\angle MDK$. Поэтому $\angle AEB+\angle AFB+\angle ADB=\angle BDK+$ $+\angle MDK+\angle ADB=90^\circ$. **677.** Изображенных на рисунке 77 двух и даже трех красок недостаточно. **678, 679.** В точке пересечения серединного перпендикуляра к AB и линии реки. **681.** Дополнением данного угла до 90° служит угол 36°. Это дополнение следует разделить на 2 равных угла, каждый из которых составляет $\frac{1}{3}$ данного угла. **682.** Постройте угол, равный $19^\circ\cdot 19$, и вычтите полный угол $(19^\circ\cdot 19-360^\circ=1^\circ)$. **683.** Указание. $a=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]-(b+c)$ **684.** Постройте в точке M перпендикуляр к AB и биссектрисы $\angle ADM$ и $\angle CDM$, где D — точка пересечения построенного перпендикуляра с AC. Точки пересечения этих биссектрис с прямой AB и будут искомыми. **685.** Сначала постройте треугольник по гипотенузе, равной данной диагонали, и катету, равному высоте. По этому треугольнику построить искомый ромб. **686.** На сторонах угла от его вершины следует отложить отрезки длиной в половину данного периметра и вписать в угол окружность, касающуюся сторон в полученных точках. Из данной точки провести касательную к этой окружности (разделяющую вершину A и центр

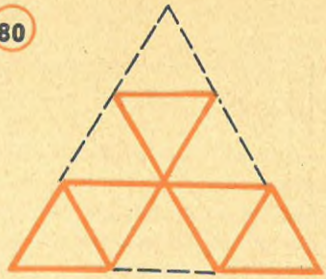


окружности). 687. Искомое множество — две окружности, концентрические данным, с радиусами, равными $\frac{r_1+r_2}{2}$ и $\frac{r_1-r_2}{2}$. 688. В общем случае получаются четыре окружности. Центры их лежат на прямой, равноудаленной от данных прямых, и находятся от центра данной окружности на расстоянии $r+\frac{d}{2}$ или $\frac{d}{2}-r$, где r — радиус данной окружности, а d — расстояние между данными параллельными прямыми. 689. $\approx 3{,}4$ м и $\approx 0{,}9$ м. 690. Пусть R — радиус данной окружности, x — радиус искомой окружности и O, O_1, O_2 — соответственно центры данной полуокружности, одной из построенных равных и искомой окружности. Тогда $|O_1O_2|^2=|O_1O|^2+ +|O_2O|^2$ или $\left(\frac{R}{2}+x\right)^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2+(R-x)^2$, откуда $x=\frac{R}{3}$. 691. Рисунок 78. На $m_a=|AE|$, как на диаметре, постройте полуокружность. Продолжите m_a так, чтобы $|ED|=\frac{1}{3}m_a$. Проведите дугу окружности с центром в точке D и радиусом $\frac{2}{3}m_b$. Точка C пересечения дуги с полуокружностью является вершиной прямого угла искомого треугольника. По ней может быть построен искомый $\triangle ABC$. 692. Пусть m_a, β_a и $h_a (m_a \geqslant \beta_a \geqslant h_a)$ — соответственно медиана, биссектриса и высота, исходящие из вершины A искомого треугольника ABC. Постройте прямоугольный треугольник ADE по гипотенузе $|AE|=\beta_a$ и катету $|AD|=h_a$ с прямым углом при вершине D. Из вершины A, как из центра, радиусом, равным m_a, проведите окружность, пересекающую DE в точке F. Постройте $FK\perp DE$, где K — точка пересечения прямых AE и FK. Серединный перпендикуляр к AK пересечется с прямой FK в точке O, которая будет центром описанной около искомого треугольника окружности. B и C — точки пересечения этой окружности с прямой DE. 693. На карте нужно построить множество точек, из которых отрезок AB виден под углом α, и множество точек, из которых отрезок BC виден под углом β. Построенные множества пересекаются в двух точках D_1 и D_2. Одна из них и будет искомой. Какая именно — это устанавливается по положению наблюдателя на местности относительно ориентиров A, B, C. 694. Две точки перпендикуляра следует построить по одну сторону от прямой AB. 695. Можно воспользоваться симметрией относительно прямой AB. 696. Можно воспользоваться осевой симметрией, пересечением высот треугольника в одной точке, пересечением диагоналей параллелограмма и другими свойствами фигур. 697. Можно воспользоваться осевой симметрией. 698. Указание. Пусть вершина A $\triangle ABC$ не уместилась на чертеже. Легко строятся середина отрезка BC — точка D, средние линии треугольника DE, DF и медианы BE, CF. Третья медиана должна пройти через D и точку пересечения первых двух медиан. 699 С центрами в точках A и B постройте две пересекающиеся дуги одного и того же радиуса. Далее, с центрами в точках пересечения этих дуг, C и D, постройте дуги одного и того же радиуса, меньшего $|AC|$, точки пересечения которых E и F лежат на прямой AB между A и B. Такое построение можно повторить. 700. Постройте A_1 и C_1, расстояние между которыми равно $|AC|$. Из точки A_1 радиусом $|AB|$ постройте дугу и из точки C_1 радиусом $|CB|$ — вторую дугу. Точка пересечения этих дуг и будет искомой точкой B_1. 701. Постройте дуги двух окружностей: с центром в точке C радиусом $|AB|$ и с центром в точке A радиусом $|BC|$. Точка пересечения этих дуг — четвертая вершина параллелограмма. 702. 1) Из точки B как центра опишите дугу радиусом $|AB|$, а из точки C — радиусом $|AC|$. Вторая точка пересечения этих дуг D и будет искомой. 2) Построение то же самое. 703. Построение циркулем такое же, как и в задаче 699. 704, 705. Воспользуйтесь построением вершин примыкающих последовательно друг к другу равносторонних треугольников со стороной AB. 706. Постройте два пересекающихся диаметра. 707. Данную точку A соедините отрезками с концами данного диаметра. Точки D и E пересечения этих отрезков с окружностью соедините отрезками с концами данного диаметра. Полученные отрезки будут высотами треугольника с вершинами в точке A и концах данного диаметра. Третья высота пройдет через точку A и точку пересечения двух построенных высот и будет искомым перпендикуляром к диаметру. 708. Воспользуйтесь тем, что если медиана к стороне треугольника равна половине этой стороны, то такой треугольник прямоугольный. 709. Воспользуйтесь тем, что с помощью двусторонней линейки легко может быть построен ромб. 710. Сначала постройте угол в 60°. Разделив его пополам, получите угол в 30°. Далее поступите как в задаче 742 построив угол в $60° + 30° = 90°$. 711. От произвольной точки A данной окружности постройте 3 равные дуги, $\breve{AB} = \breve{BC} = \breve{CD} = 60°$. С центром в точках A и D радиусом, равным $|AC| = |BD|$, постройте две пересекающиеся в точке E дуги окружностей. Отрезок OE, где O — центр данной окружности, равен стороне вписанного в данную окружность квадрата. Действительно, $|DE| = |AE| = r\sqrt{3}$ (r — радиус данной окружности) и $|EO| = \sqrt{|DE|^2 - |OD|^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$. 712. Постройте окружность с центром в точке A и радиусом AO, найдите на ней точку D, симметричную точке O относительно точки A. Дуга окружности с центром в точке D и радиусом, равным радиусу данного круга, пересечет окружность данного круга в искомых точках. 713. Постройте отрезок A_1B и через точку O пересечения его с осью a проведите прямую AO. Найдите точку их пересечения и постройте прямую (A_1O_1). Искомая точка B — пересечение прямых AO и A_1O_1. 714. Рисунок 79. 719. Рисунок 80. 720. 1) Рисунок 81. 732. Разрезать по диагонали. 734. Рисунок 82. Если a и b — длины сторон данных квадратов, а c — длина стороны третьего квадрата, то $c^2 = a^2 + b^2$. 735. $mn - 1$. 736. 6. 738. Указание. Сначала разрежьте на два прямоугольных треугольника. 740. 1) 384; 2) 96; 3) 8; 4) 512. 741. Рисунок 83. 742. Рисунок 84. 743. 2) данный треугольник сначала разрежьте на два прямоугольных треугольника. 744. Сумма внутренних углов полученных треугольников равна сумме всех внутренних углов стоугольника и всех полных углов с вершинами в отмеченных десяти точках, т. е. $180° \cdot 98 + 360° \cdot 10$. Получается 118 треугольников. 745. 746. 10. 747. а) 20; б) 28. 748. 32. 749. 12. 750. 6. 751. 4 раза. 752. Можно воспользоваться «центроискателем» (рис. 85). $\angle CAD = 90°$ (AB — биссектриса этого угла) или чертежным треугольником. Центр круга —

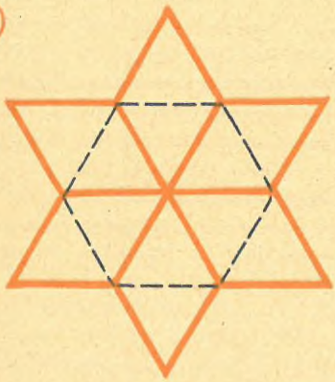
79



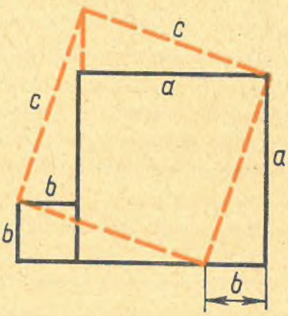
80



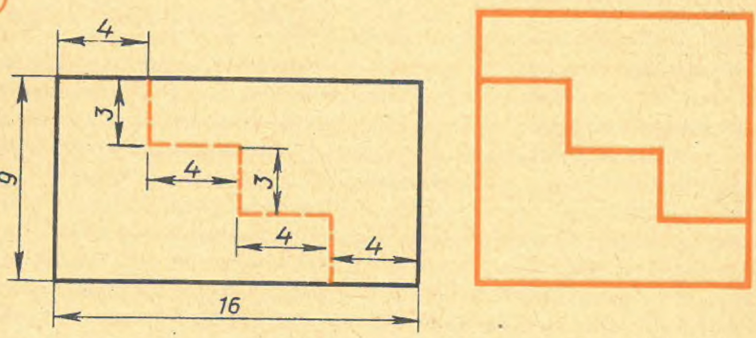
81



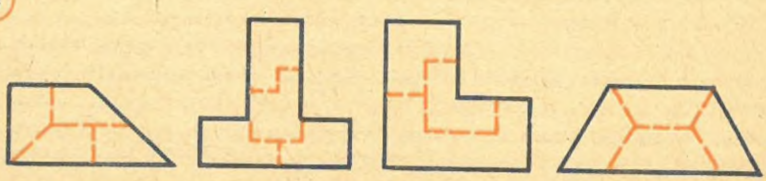
82

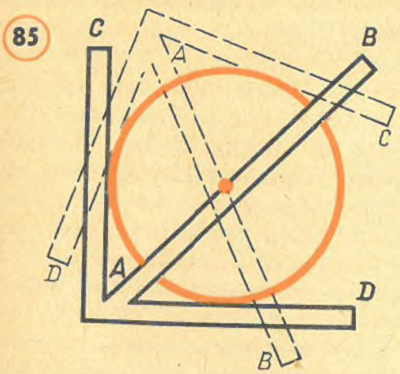


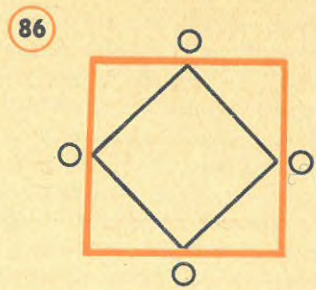
83



84

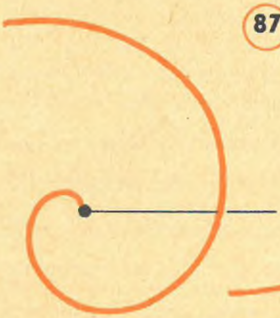






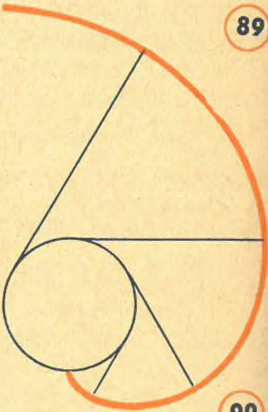
точка пересечения двух диаметров. 753. Рисунок 86. 754. Не более 3. Если бы внутренних острых углов было более 3, то многоугольник имел бы более 3 тупых внешних углов и сумма их оказалась бы больше 360°, что невозможно. 755. Задача о делении угла на 3 равные части с помощью циркуля и линейки разрешима лишь для некоторых определенных углов. 756. Пусть a — длина стороны данного квадрата. Длина стороны искомого квадрата равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами a и $2a$. 757. ab. 758. 617 см^2. 759. 1130 км^2. 760. $\sqrt{2}d$, где d — диаметр каждой из заменяемых труб. 761. Пусть r — радиус данного круга. 1) Радиус искомого круга $\sqrt{10}r = \sqrt{r^2+9r^2}$ — равен длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами r и $3r$. 2) Указание. $\sqrt{13}=\sqrt{2^2+3^2}$. 762. $\frac{5\pi}{6}$. 763. Продолжите стороны BC и FE до пересечения в точке K, найдите точку пересечения KL и ED и проведите через нее прямую, параллельную AB. 764. $\frac{3}{4}$ кв. единицы. 765. Площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей соответственно построенных на катетах подобных ей фигур. 766. Найдите площадь одного из четырех равных четырехугольников, составляющих данный восьмиугольник. 767. Пусть r — длина радиуса вписанной в треугольник окружности, $p+r$ и $q+r$ — длины катетов. По теореме Пифагора можно найти: $r=\frac{1}{2}(-p-q+\sqrt{p^2+q^2+6pq})$. Площадь равна pq. 770. По рисунку 56 видно, что $S_{\text{I}}-S_{\text{III}}=S_{BD}$ (S_{BD} — площадь квадрата, построенного на BD) и $S_{\text{II}}-S_{\text{IV}}=S_{BD}$. Поэтому $S_{\text{II}}-S_{\text{I}}=S_{\text{IV}}-S_{\text{III}}$. 771. 1) Нельзя, так как $163\cdot 65$ не делится на 3; 2) Можно. Для обоснования этого ответа мало установить, что $161\cdot 66$ делится на 3. Нужно еще найти искомое разбиение. 772. Треугольный, он имеет большую боковую поверхность. 773. Воспользуйтесь центральной симметрией. 774. Каждый из отрезков AB, AC и BC примите за основание и достройте трапецию, если это окажется возможным. Число решений зависит от расположения точек A, B и C. 775. 1) Пусть A, B и O — соответственно точки на краях полосы и на ее средней линии. Постройте точки A_1, симметричную точке A относительно точки O и B_1, симметричную точке B относительно точки O. AB_1 и BA_1 являются краями полосы. Задача имеет бесконечно много решений, если A, B и O лежат на одной прямой. 776. Постройте точки M_1, симметричную точке M относительно N, и N_1, симметричную точке N относительно M. На AM_1 и AN_1 лежат две смежные стороны искомого параллелограмма. Дальнейшие построения очевидны. 777. Пусть M, N, P и Q — данные точки (принадлежат смежным сторонам квадрата). Постройте отрезок NQ, затем $MR = NQ$ и $MR \perp NQ$, пересекающий прямую NQ. Одна из сторон искомого квадрата лежит на PR. Дальнейшее очевидно. 778. Пусть M и N — данные точки смежных сторон квадрата. На MN, как на диаметре, постройте окружность. Найдите середину K той полуокружности, которая опирается на MN и лежит с той же стороны, что и данная точка O. На OK лежит диагональ искомого квадрата. О дальнейшем вы догадаетесь. 779. Основания биссектрис — вершины вспомогательного равнобедренного треугольника с основанием DE и вершиной F. Через F проведите прямую, параллельную DE. На этой прямой лежат концы основания искомого треугольника. Кроме того, от точек D и E они отстоят на расстояниях, равных DE. 780. Найдите точку пересечения O с данной прямой серединного перпендикуляра к AB, концами которого служат данные точки, и опишите окружность из точки O, как центра, радиусом $|OA|$. Точки пересечения этой окружности с данной прямой и будут концами основания искомого тре-

87

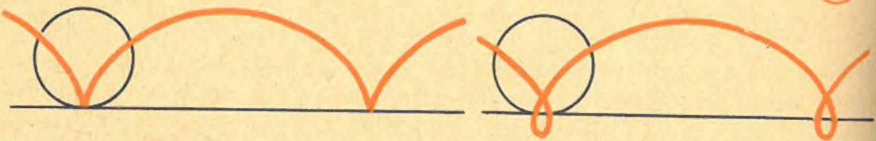


88

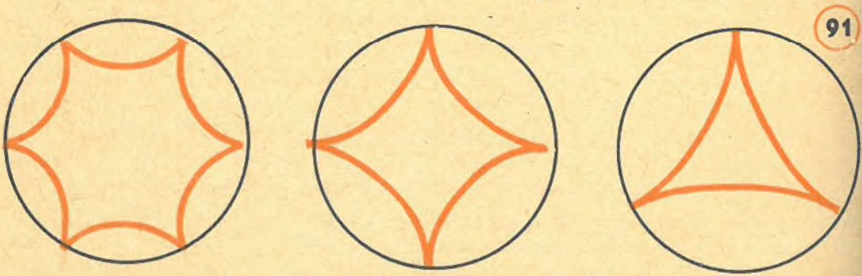
89



90



91



угольника. 781. Пусть основание искомого треугольника AC и O — точка пересечения его высот. Постройте AO и CO и перпендикулярные им соответственно лучи с началами в точках C и A — это будут стороны искомого треугольника. 782. Пусть M, N и P — данные точки. Постройте $\triangle MNP$ и его биссектрисы. Точки пересечения продолжений этих биссектрис с окружностью и будут вершинами искомого треугольника. 783. 3) Пусть A, B и C — вершины искомого треугольника (точка A — дана). Должно быть: $\angle BOC = 180° - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle ACB}{2}$, $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB$. Отсюда: $\angle BAC = 2\angle BOC - 180°$. $\angle BAC$ можно построить, тогда определяются вершины B и C искомого треугольника. 784. Задача имеет бесконечно много решений. 785. Рисунок 87. 786. Рисунок 88. 789. Рисунок. 89. 791. Рисунок 90. 792. Рисунок 91. 793. $180° \leqslant \angle ABC < 360°$. 794. 1) Можно. 2) и 3) Нельзя. 795. 48 см. 796. Прямоугольный. 797. Тупоугольный. 798. 60°, 120°, 60°, 120°. 799. 270°. 800. Нет. 801. Все внутренние углы равны. 802. Можно. Приведите пример. 803. Можно. Приведите пример. 804. Биссектрисы — нет, высоты и медианы — да. 805. Остроугольный или тупоугольный. 806. 9 дм. 807. 2,2 м. 808. Равны. 809. Через центры симметрии параллелограммов. 810. Паркет можно составить из равносторонних треугольников, квадратов и правильных шестиугольников. 811. Не может. 812. Прямая, проходящая через вершину и точку противоположной стороны треугольника, пересекает все его стороны. 813. Нет. 814. 3, так как сумма величин всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. 815. Треугольник. 816. Все остальные острые, и сумма их равна 90°. 817. Да. 818. Нельзя. 819. Нельзя. 820. 1) Дельтоид (четырехугольник, составленный из двух равнобедренных (не равных треугольников, приложенных один к другому равными основаниями)); равнобочная трапеция; 2) параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба; 3) прямоугольник или ромб, отличный от квадрата; 4) квадрат. 821. 4. 822. $2n$. 823. 1) Не более чем на 5; 2) на 4 части 824. 1) 7; 2) 9; 3) 19. 825. 7. 826. Квадрат. 827. Первый квадрат — из 4 данных квадратов, второй — из 9. 828. $\frac{1}{8}$. 829. Периметр 8 см, площадь 4 см^2.

ГЛАВА V

832. 8 ч. 833. Задача не имеет решения. 834. 10 раз. 835. На 50. 836. 12,5. 837. 11 106. 838. 1050. 839. $(70^2 - 69 \cdot 70 + 130) = 70\ (70 - 69) + 130 = 200$. 840 3. 841. 1) 65 536; 2) 256; 3) 1. 842. 1) Не существует. 2) Существует число 0. 843. Когда одно число втрое больше другого. 844. Когда один из множителей и делитель равны соответственно 1 или -1. 845. 1. 846. Например, так $4^{4+\frac{4}{4}}$ 847. 9 ч. 848. Например, $5 + 0 \cdot n$ или $4 + (-1)^n$. 849. По числу осей симметрии: две, одна и ни одной. 850. 1) Буквы имеют лишь вертикальную ось симметрии; 2) только горизонтальную; 3) только центр симметрии; 4) вертикальную и горизонтальную оси симметрии, а также центр симметрии; 5) буквы не обладают ни осевой, ни центральной симметрией. 851. 0,5 и -1. 852. Леонардом Эйлером (в 1736 г.) и У. Джонсоном (в 1706 г.). 853. Немецким математиком Г. Лейбницем. 854. 14 сентября 1918 г. Советом Народных Комиссаров под председательством В. И. Ленина. 856. А. С. Грибоедов.

858. Начать вопросник можно так: 1) Содержится ли задуманное число среди чисел 1—500? При ответе «Да» спросить: 2) Содержится ли задуманное число среди чисел 1—250? При ответе «Нет» задать вопрос: 1) Содержится ли задуманное число среди чисел 501—750? Последующие вопросы аналогичны (каждый раз числовой промежуток, содержащий задуманное число, делится пополам). Один из возможных обходов: $A—B—C—D—E—A—C—E—B$. 861. Приписывание к трехзначному числу такого же числа равносильно умножению этого трехзначного числа на 1001, а $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. 862. Пусть задуманное число $100a + 10b + c$ и $a > c$. Обращенное число $100c + 10b + a$ и разность их $99a - 99c$. Эта разность равна $100\ (a - c - 1) + 90 + (10 - a + c)$, где $a - c - 1$ — число сотен, $10 - a + c$ — число единиц. Обращенное для разности число $100(10 - a + c) + 90 + a - c - 1$. Сумма будет равна $100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c) + 100 (10 - a + c) + 90 + a - c - 1 = 100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089$. 864. $10\,a + b$ — задуманное число. Получается: $(2a + 5)5 + 10 + b = 10\,a + b + 35$. 865. Каждая цифра задуманного числа в записи шести двузначных чисел встретится 4 раза: 2 раза она будет показывать число десятков и 2 раза — число единиц. При делении суммы шести таких двузначных чисел на 22 получится сумма цифр задуманного числа. 866. Остатки от деления натурального числа и суммы его цифр на 9 равны. У двух чисел, записанных одними и теми же цифрами, остатки от деления на 9 равны и разность этих чисел делится на 9 без остатка. Чтобы найти вычеркнутую цифру, необходимо сумму оставшихся цифр дополнить до ближайшего большего числа, кратного 9. 867. Пусть $a - b$ — первая разность. Тогда вторая будет $c - a$, третья $d - c$, четвертая $e - d$ и пятая $f - e$. Если ограничиться пятью разностями, то сумма их будет равна $a - b + c - a + d - c + e - d + f - e = f - b$. 869. Пусть m — порядковый номер месяца рождения, t — число этого месяца и n — число лет. Тогда $(((100\,m + t)2 + 8)5 + 4)10 + n + 4 = 10000\,m + 100\,t + n + 444$. 870. В основе этого развлечения лежит представление числа в двоичной системе счисления. Например, $23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Такое представление единственно. Это число записано только на первой, второй, третьей и пятой карточках (см. показатели степеней). Значит, первые числа карточек — это те степени числа 2, которые входят в представление задуманного числа в виде суммы степеней 2 с разными показателями, $(1 = 2^0)$. 871. Используется равенство: $12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$. 872. Объяснение дает равенство: $(4\,x + 7)25 + y + 125 = 100\,x + y + 300$; x — номер дома, y — возраст. 873. $((a + 3) \cdot 5 + 20) \cdot 2 + b + 5 = 10\,a + b + 75$, a — число братьев, b — число сестер. 874. Пусть ваш товарищ задумал 6 ч. В этом случае указкой вам придется показать числа на циферблате 14 раз (этого вы не знаете). В восьмой раз вы укажите на 12 ч, а дальше будете указывать каждый раз на 1 ч меньше и сделаете это столько раз (6), сколько единиц недостает вашему товарищу до 20. 877. Весь «секрет» в подборе чисел, характеризующих повороты меньшего круга. Разгадайте его.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ФЕДОР ФЕДОРОВИЧ НАГИБИН, ЕВГЕНИЙ СТЕПАНОВИЧ КАНИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКАТУЛКА

Пособие для учащихся

Зав. редакцией Р. А. ХАБИБ
Редакторы В. И. ЕФИМОВ, Л. В. ТУРКЕСТАНСКАЯ
Мл. редактор Л. И. ЗАСЕДАТЕЛЕВА
Художники Е. С. ШАБЕЛЬНИК, Е. П. ТИТКОВ
Художественный редактор Е. Н. КАРАСИК
Технический редактор Г. В. СУБОЧЕВА
Корректоры Т. А. ВОРОБЬЕВА, С. Ю. ФОКИНА

ИБ № 8078

Сдано в набор 03.11.83. Подписано к печати 14.09.84. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. кн.-журн. Гарнит. школьная. Печать офсет. Усл. печ. л. 10,0 + форз. 0,25, усл. кр. отт. 21,50. Уч.-изд. л. 10,02 + форз. 0,44. Тираж 760 000 экз. Заказ 706. Цена 55 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфкомбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Смоленск-20, ул. Смольянинова, 1.

B
C
D
A
666