Л.В.ЕРШОВ
Р.Б.РАЙХМИСТ

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Л. В. ЕРШОВ
Р. Б. РАЙХМИСТ

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
„ПРОСВЕЩЕНИЕ“ 1984

ББК 22.14
Е80

Рецензенты:
учителя математики — Т. Н. ТРУШАНИНА
и Б. М. ИВЛЕВ (г. Москва)

Ершов Л. В., Райхмист Р. Б.

Е80 Построение графиков функций: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1984. — 80 с., ил.

Пособие предназначено учителям математики средних школ. Оно содержит теоретический материал, общую схему исследования функций, которая иллюстрируется многочисленными примерами, а также рассматривается построение графиков сложных функций средствами элементарной математики и предлагается методика построения эскизов графиков функций без проведения полного исследования.

Е $\frac{4306010400-591}{103(03)-84}$ 140—84

ББК 22.14
512

Глава I

§ 1. ФУНКЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть D и E — числовые множества, а x и y — соответственно их элементы.

Определение. Если каждому $x \in E$ ставится в соответствие по некоторому закону только одно значение $y \in E$, то говорят, что между переменными x и y существует функциональная зависимость, и называют x независимой переменной или аргументом, а y — зависимой переменной или функцией.

Символическая запись функции: $y = f(x)$, или $x \xrightarrow{f} y$. Множество D называют областью определения функции и обозначают $D(f)$, а множество E — областью изменения функции.

Функция может быть задана различными способами: аналитическим, табличным, описательным, графическим.

К основным элементарным функциям относятся следующие:

1. Степенная функция $y = x^n$, где n — действительное число, большее нуля (рис. 1, 2).

2. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$; $a \neq 1$ (рис. 3).

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 4).

4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 5, 6, 7, 8).

5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 9, 10, 11, 12).

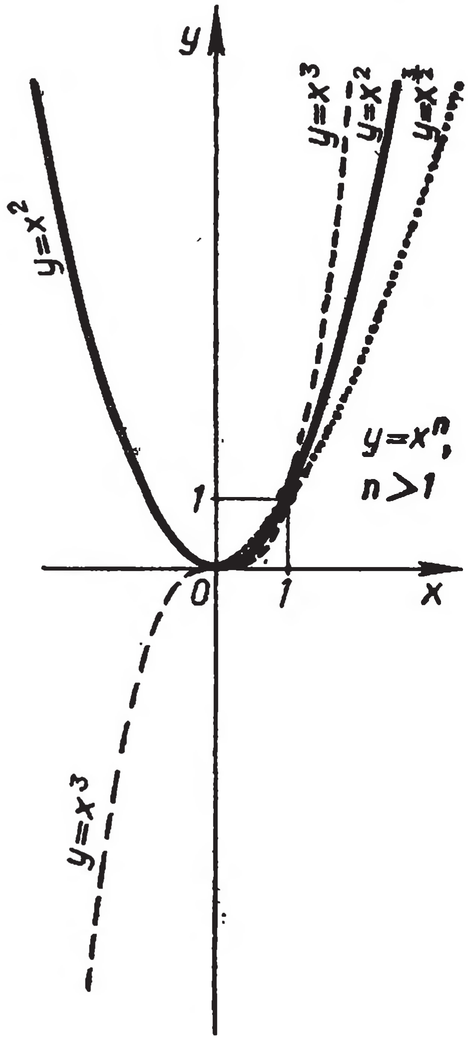

Рис. 1

Основные элементарные функции могут соединяться между собой с помощью арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), а также с помощью операции взятия функции от функции (суперпозиций функций). Особо выделим два важных частных случая:

1. Линейная функция $y = kx + b$.

2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

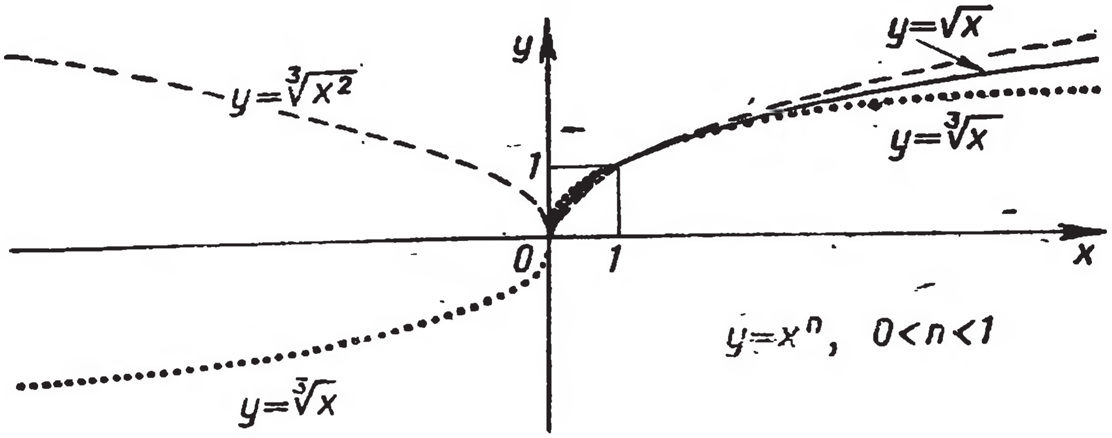

Рис. 2

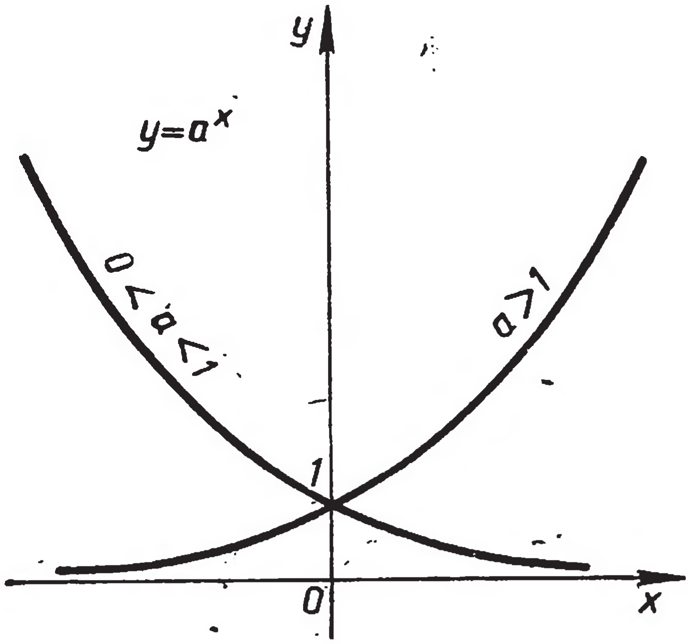

Рис. 3

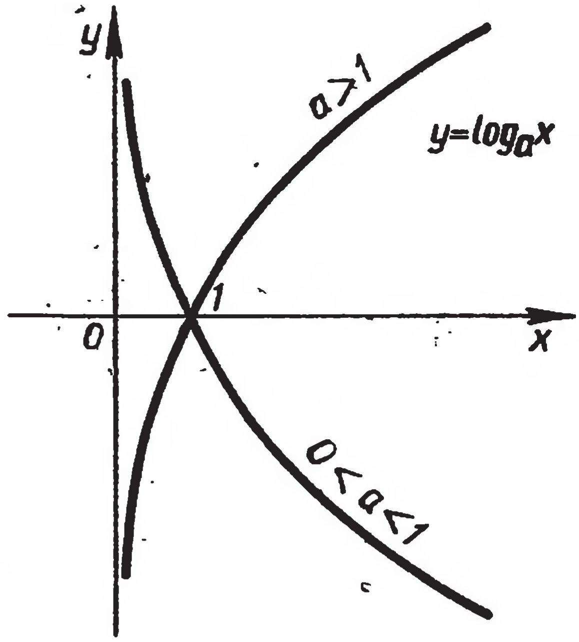

Рис. 4

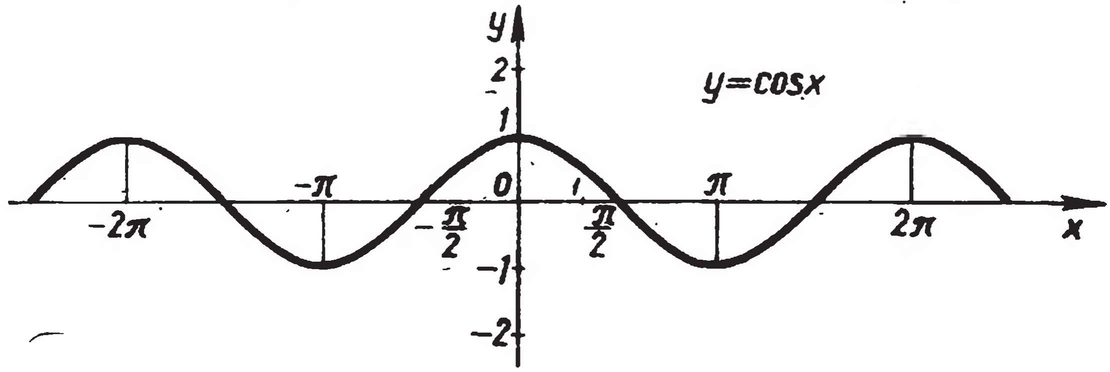

Рис. 5

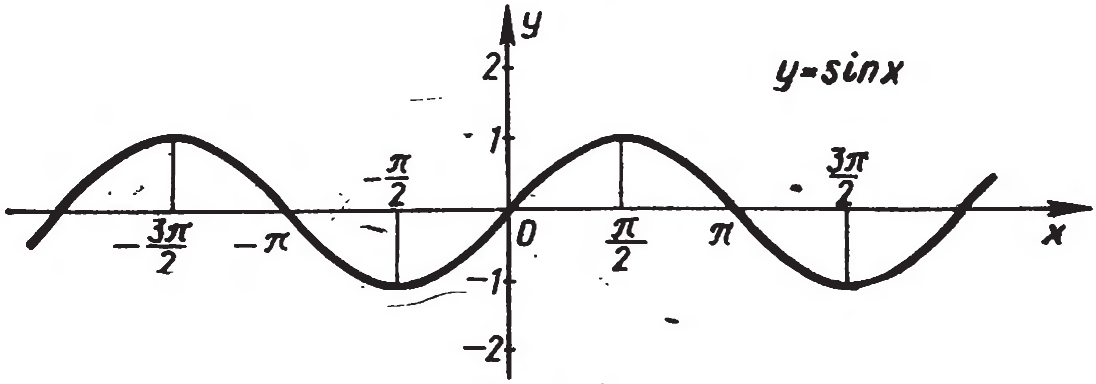

Рис. 6

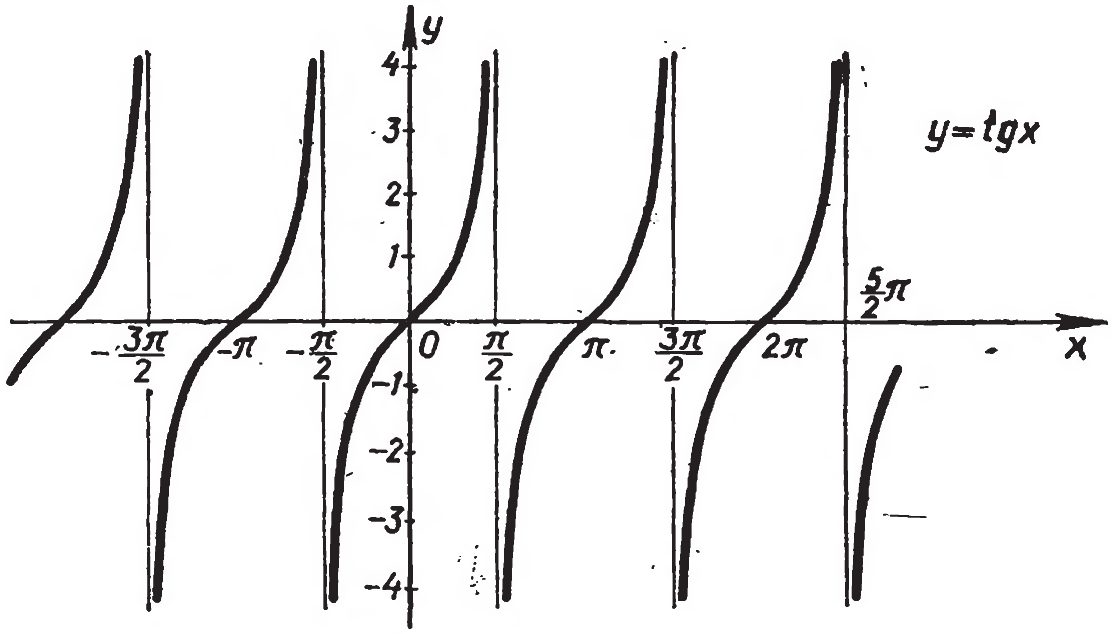

Рис. 7

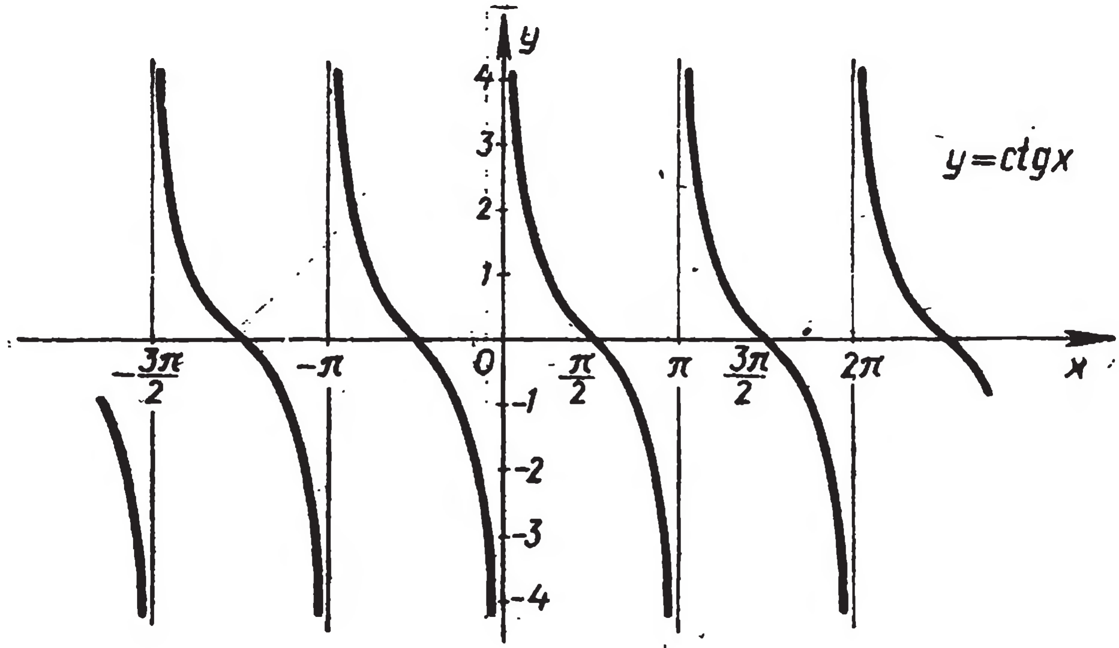

Рис. 8

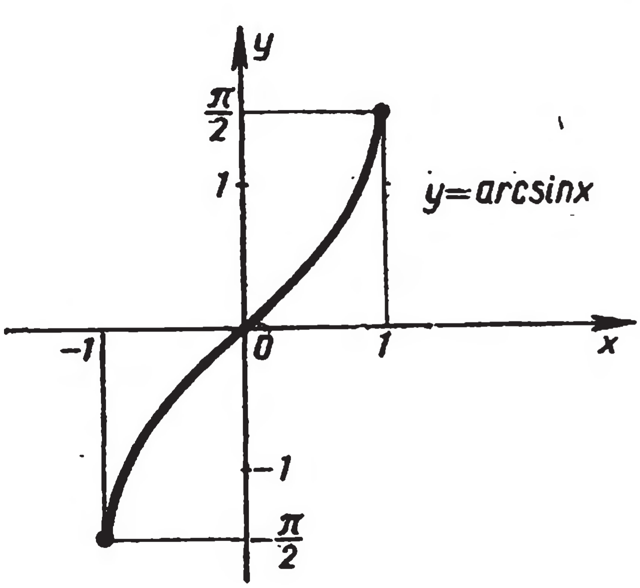

Рис. 9

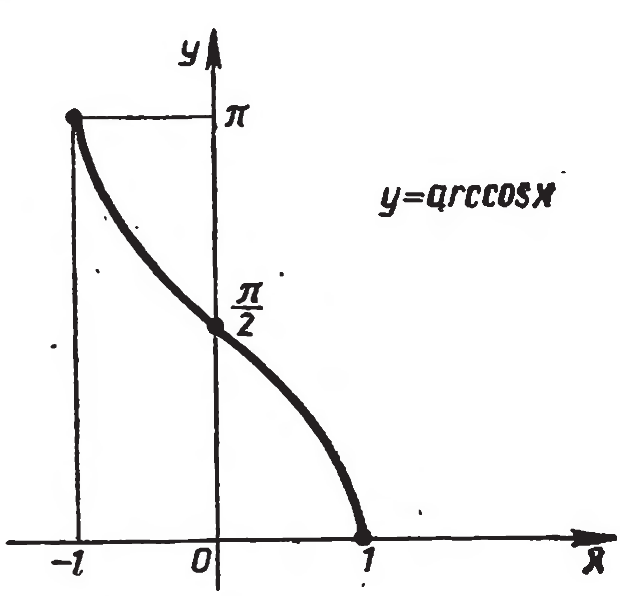

Рис. 10

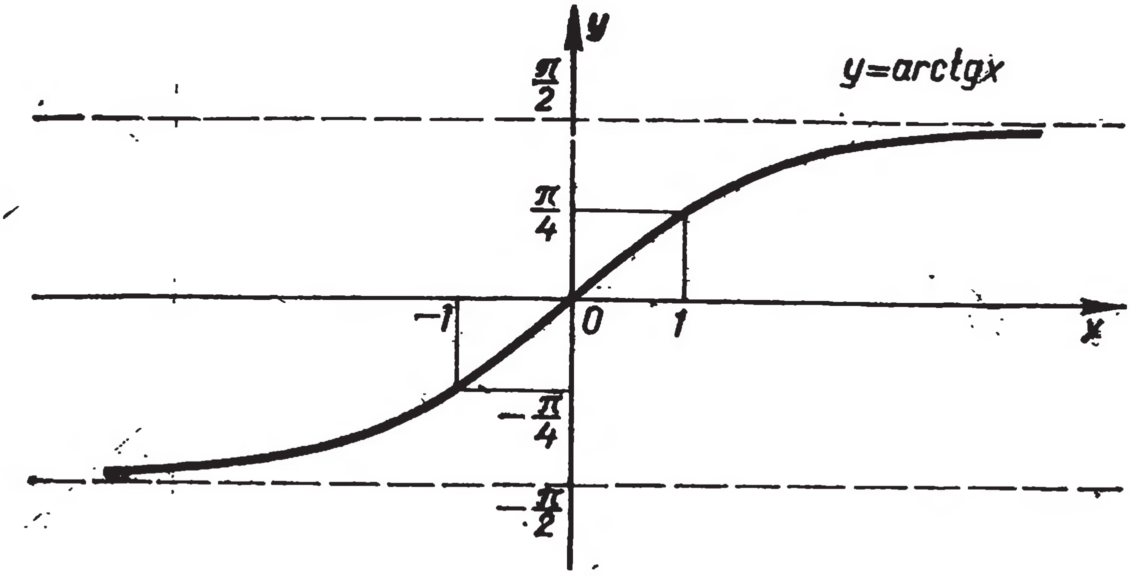

Рис. 11

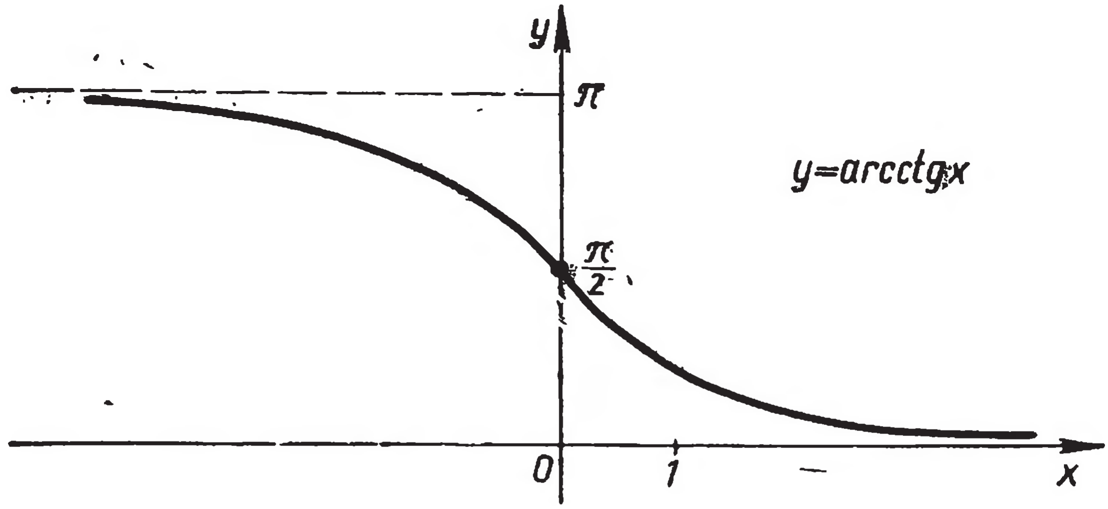

Рис. 12

Замечание 1. График линейной функции — прямую линию удобно строить по двум точкам: точке A с координатами $x = 0$, $y = b$ и точке B с координатами $y = 0$, $x = -\frac{b}{k}$ $(k \neq 0)$ (рис. 13, *б*). В случае $b = 0$ прямая проходит через начало координат, и для построения графика следует взять еще одну точку, например точку $C(1, k)$. В случае $k = 0$ прямая параллельна оси абсцисс (рис. 13, *а*).

Замечание 2. Покажем один из многих приемов построения графика квадратичной функции — параболы. Этот способ основывается на том факте, что три различные точки, принадлежащие параболе, определяют ее единственным образом.

Пусть нам даны три различные точки, принадлежащие графику квадратичной функции: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Очевидно, что $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, в противном случае найдутся хотя бы две точки параболы, лежащие на прямой, параллельной оси ординат, чего быть не может.

Так как по условию точки принадлежат графику квадратичной функции, то их координаты удовлетворяют уравнению $y = ax^2 + bx + c$, т. е.

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c. \end{cases}$$

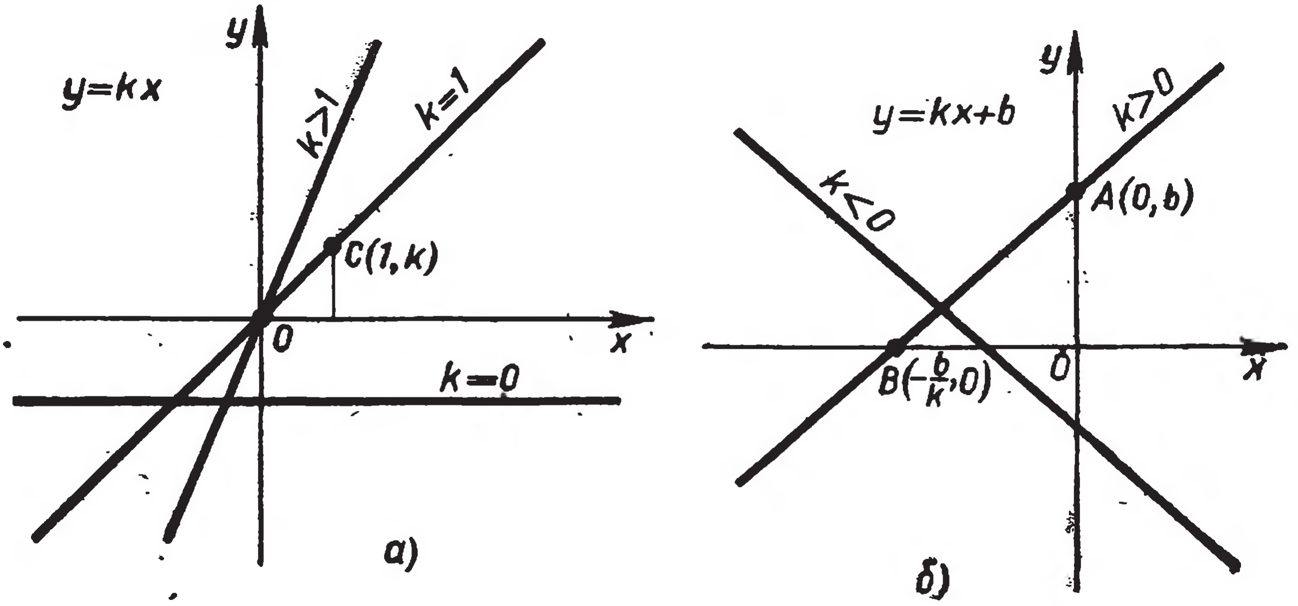

Рис. 13

Можно показать, что полученная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b и c для случая $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ имеет единственное решение и определяет тем самым единственную параболу $y = ax^2 + bx + c$.

Для построения параболы $y = ax^2 + bx + c$ удобно выбрать следующие три точки (рис. 14, *а*):

а) так как при $x = 0$ $y = c$, то в качестве первой точки следует взять точку $C\ (0, c)$;

б) полагая $y = c$, получим либо $x = 0$ (это точка C), либо $x = -\frac{b}{a}$; таким образом, в качестве второй точки возьмем точку $B\left(-\frac{b}{a},\ c\right)$;

в) в качестве третьей точки берем вершину параболы $A\,(x_A,\ y_A)$, где $x_A = \frac{x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$, $y_A = ax_A^2 + bx_A + c$.

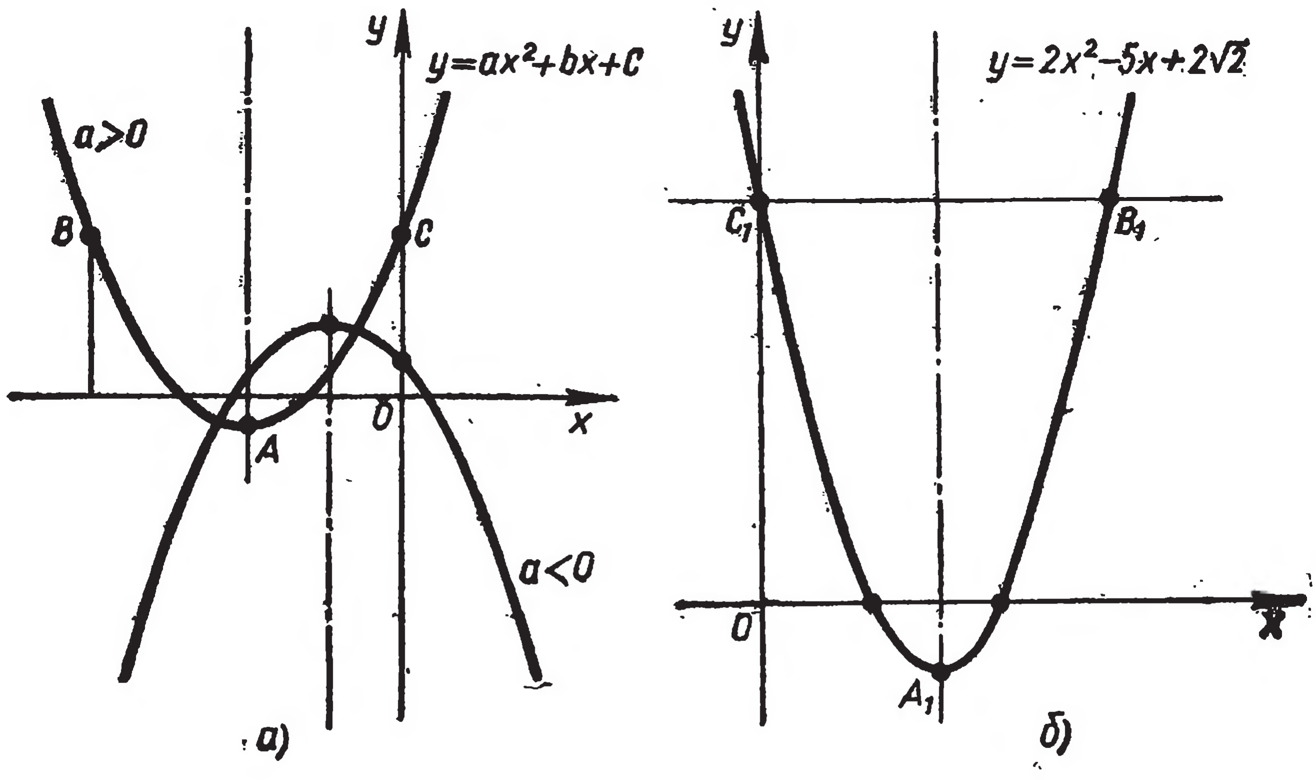

Рис. 14

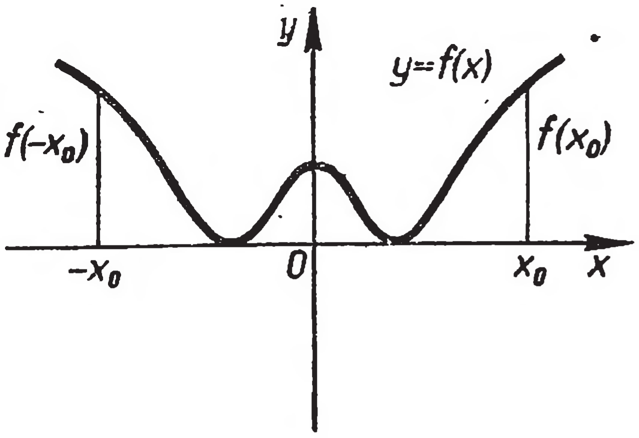

Рис. 15

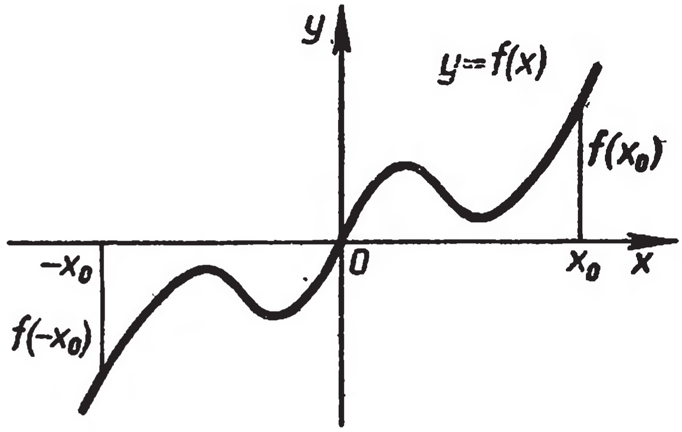

Рис. 16

Пример. Построить график функции $y = 2x^2 - 5x + 2\sqrt{2}$. Отметим три точки: $C_1(0,\ 2\sqrt{2})$, $B_1\left(\frac{5}{2},\ 2\sqrt{2}\right)$, $A_1\left(\frac{5}{4},\ 2\sqrt{2} - 3\frac{1}{8}\right)$. Ветви параболы направлены вверх. Парабола симметрична относительно прямой $x = \frac{5}{2}$ (рис. 14, *б*).

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Четность и нечетность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Согласно определению график четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 15).

Примеры четных функций: $y = x^2$ (см. рис. 1), $y = \sqrt[3]{x^2}$ (см. рис. 2), $y = \cos x$ (см. рис. 6).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

Из определения следует, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 16).

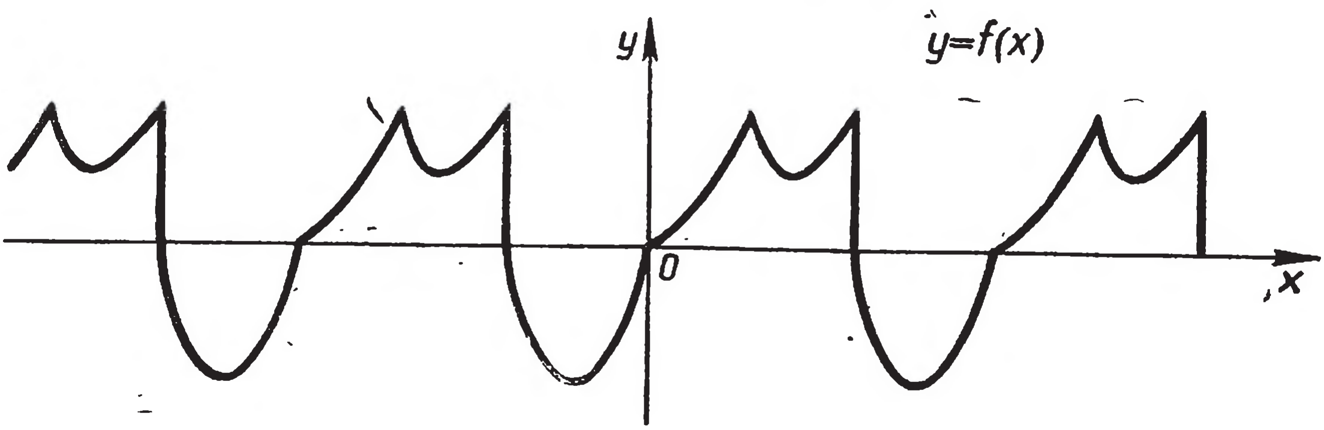

Рис. 17

Примеры нечетных функций: $y = x^3$ (см. рис. 1), $y = \sqrt[3]{x}$ (см. рис. 2), $y = \sin x$ (см. рис. 5), $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 7), $y = \operatorname{arctg} x$ (см. рис. 11), $y = \arcsin x$ (см. рис. 9).

Замечание. При построении графиков четных и нечетных функций достаточно построить только правую ветвь графика — для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси y для четной функции и кососимметрично (т. е. симметрично относительно начала координат) для нечетной.

Примеры функций, не являющихся ни четными, ни нечетными: $y = x^2 - x$, $y = \sqrt[3]{x-2}$, $y = \sin(2x - 1)$.

Периодичность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $x + T$, $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x) = f(x + T)$ (рис. 17).

Число T называется периодом функции. Заметим, что всякая периодическая функция имеет бесконечное число периодов. В самом деле, числа вида nT при любом целом n также являются периодами функции $f(x)$, так как

$$f(x + nT) = f[(x + (n-1)T) + T] = \\ = f[x + (n-1)T] = f[(x + (n-2)T) + T] = \\ = \ldots = f(x).$$

Примеры периодических функций: $y = \sin x$ (см. рис. 5), $y = \cos x$ (см. рис. 6), $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 7), $y = \operatorname{ctg} x$ (см. рис. 8). Отметим, что периодическую функцию достаточно исследовать в пределах одного периода.

Примеры непериодических функций: $y = x^3$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = e^x$, $y = \sin(x^2 + 1)$.

Нули функции

Определение. Нулем функции называется то действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Для того чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Действительные корни этого уравнения являются нулями функции $y = f(x)$, и наоборот. Графически нули функции

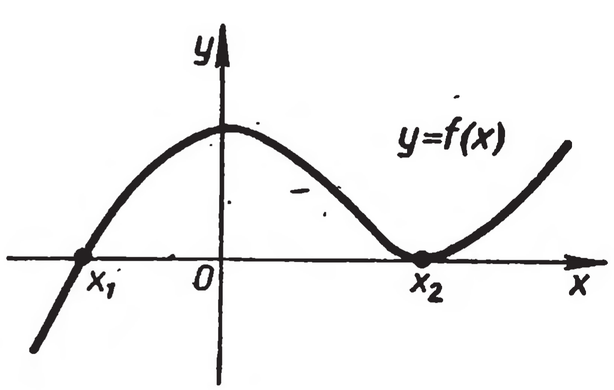

Рис. 18

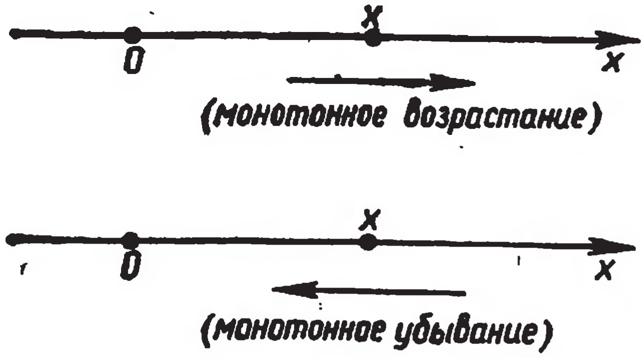

Рис. 19

представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции пересекает ось абсцисс или касается ее (рис. 18). Функция может и не иметь нулей. Такова, например, функция $y = a^x$ (см. рис. 3).

Монотонность

Переменная величина называется монотонной, если она изменяется только в одном направлении, т. е. либо только возрастает, либо только убывает. Очевидно, что движение точки x в сторону положительного направления оси абсцисс будет монотонно возрастающим, а в обратную сторону — монотонно убывающим (рис. 19).

Функция называется монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента увеличивается значение функции, а с уменьшением аргумента уменьшается значение функции (рис. 20, *а*). Функция называется монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается, а с уменьшением аргумента значение функции увеличивается (рис. 20, *б*). Дадим определение.

Определение. Функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на интервале $]a; b[$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $]a; b[$, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

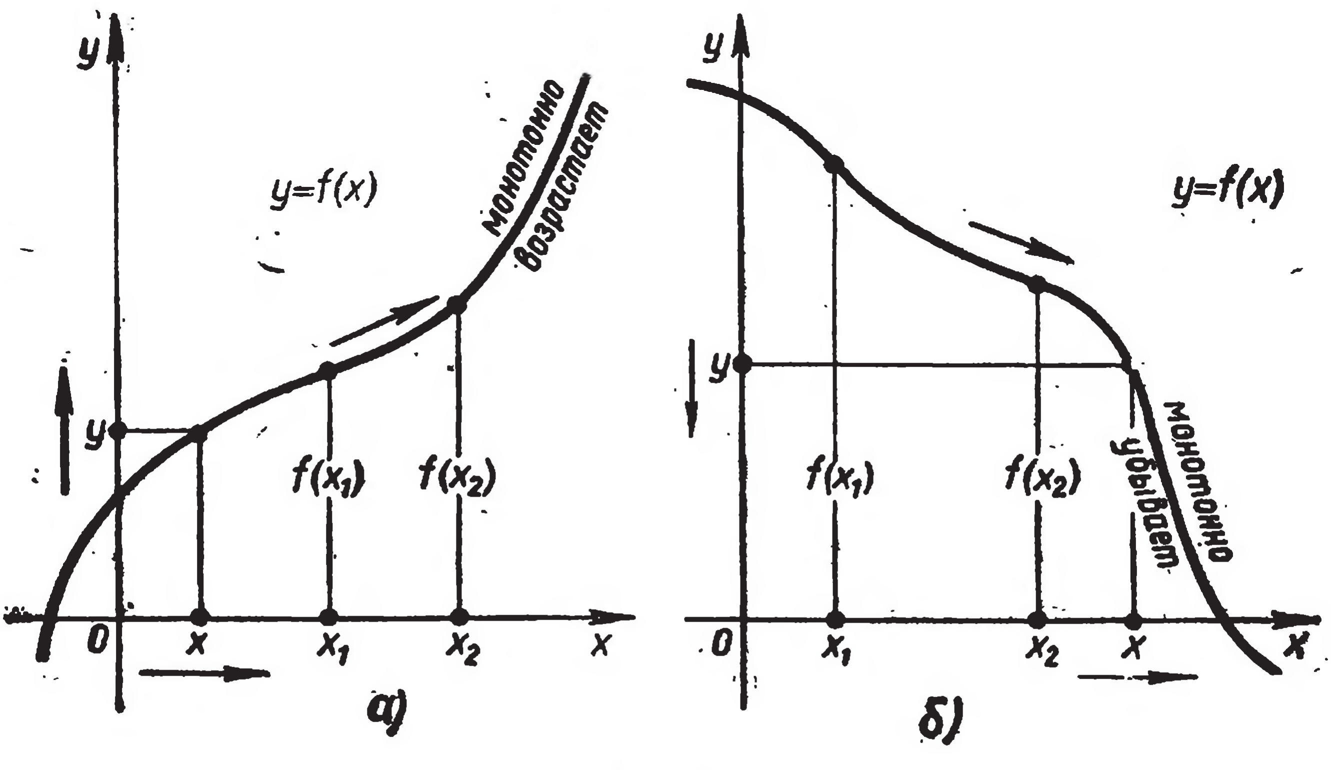

Рис. 20

Функция $y = f(x)$ монотонно убывает на интервале $]a; b[$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $]a; b[$, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Естественно, что интервал $]a; b[$ предполагается взятым из области определения функции.

Изучим интервалы монотонного возрастания и убывания основных элементарных функций.

1. $y = kx + b$ (см. рис. 13, *б*). Функция монотонно возрастает на всей числовой оси при $k > 0$ и монотонно убывает на всей числовой оси при $k < 0$.

2. $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис. 14). При $a > 0$ функция монотонно убывает на интервале $]-\infty; x_A[$ и монотонно возрастает на интервале $]x_A; +\infty[$ (x_A — абсцисса вершины параболы).

При $a < 0$ функция монотонно возрастает на интервале $]-\infty; x_A[$ и монотонно убывает на интервале $]x_A; +\infty[$.

3. $y = x^n$ (см. рис. 1, 2). При нечетном $n > 1$ функция монотонно возрастает на всей числовой оси (например, $y = x^3$). При четном $n > 1$ функция монотонно убывает на интервале $]-\infty; 0[$ и монотонно возрастает на интервале $]0; +\infty[$ (например, $y = x^2$). При $0 < n = \frac{p}{q} < 1$ (p, q — нечетные числа) функция монотонно возрастает на всей числовой оси (например, $y = \sqrt[3]{x}$).

При $0 < n = \frac{p}{q} < 1$ и p четном, q нечетном (например, $y = \sqrt[3]{x^2}$) функция монотонно убывает на интервале $]-\infty; 0[$ и монотонно возрастает на $]0; +\infty[$.

При $0 < n = \frac{p}{q} < 1$ и q четном, p нечетном (например, $y = \sqrt{x}$) функция монотонно возрастает на интервале $]0; +\infty[$.

4. $y = a^x$ (см. рис. 3). При $a > 1$ функция монотонно возрастает на всей числовой оси. При $0 < a < 1$ функция монотонно убывает на всей числовой оси.

5. $y = \log_a x$ (см. рис. 4). При $a > 1$ функция монотонно возрастает на интервале $]0; +\infty[$; при $0 < a < 1$ функция монотонно убывает на интервале $]0; +\infty[$.

6. $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 7). На интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ функция монотонно возрастает. Так как $\operatorname{tg} x$ — функция периодическая с периодом π, то она монотонно возрастает на любом интервале вида $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right[$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7. $y = \operatorname{arctg} x$ (см. рис. 11). Функция монотонно возрастает на всей числовой оси.

Выпуклость и вогнутость

Определение. Функция $y = f(x)$ называется вогнутой в точке $x = a$, если касательная к графику функции в точке

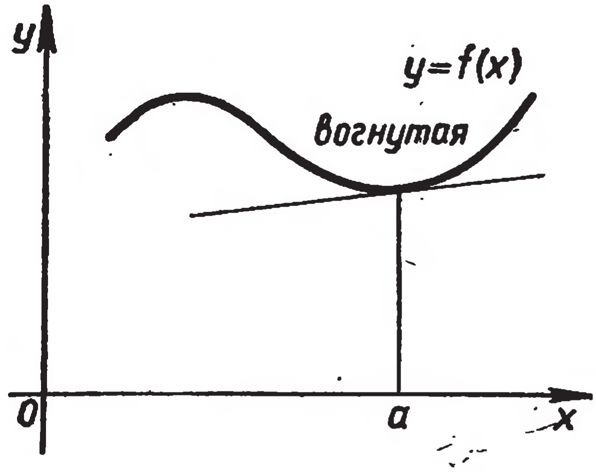

Рис. 21

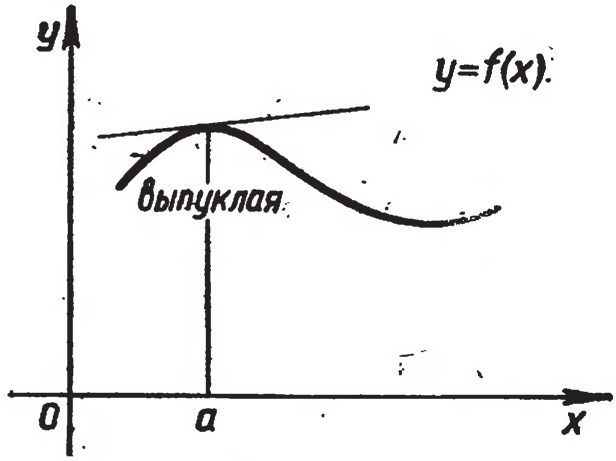

Рис. 22

$(a, f(a))$ лежит ниже графика (рис. 21) в некоторой окрестности точки $(a, f(a))$. Функция $y=f(x)$ называется выпуклой в точке $x = a$, если касательная к графику функции в точке $(a, f(a))$ лежит выше графика (рис. 22) в некоторой окрестности точки $(a, f(a))$.

Если на некотором промежутке кривой все касательные к точкам этой кривой лежат ниже (соответственно выше) самой кривой, то на данном промежутке функция будет вогнутой (выпуклой) (рис. 23, 24).

Изучим с точки зрения вогнутости и выпуклости основные элементарные функции.

1. $y = x^2$ (см. рис. 1). Функция вогнута на $]-\infty; +\infty[$.

2. $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 2). Функция выпукла на $]0; +\infty[$.

3. $y = x^3$ (см. рис. 1). Функция при $x > 0$ вогнута, а при $x < 0$ выпукла.

4. $y = \sqrt[3]{x}$ (см. рис. 2). Функция $y = \sqrt[3]{x}$ при $x > 0$ выпукла, а при $x < 0$ вогнута.

5. $y = \sqrt[3]{x^2}$ (см. рис. 2). Функция выпукла при $x > 0$ и при $x < 0$.

Отметим, что степенная функция $y = x^n$ при $n > 1$ и $x > 0$ вогнута, а при $0 < n < 1$ и $x > 0$ выпукла.

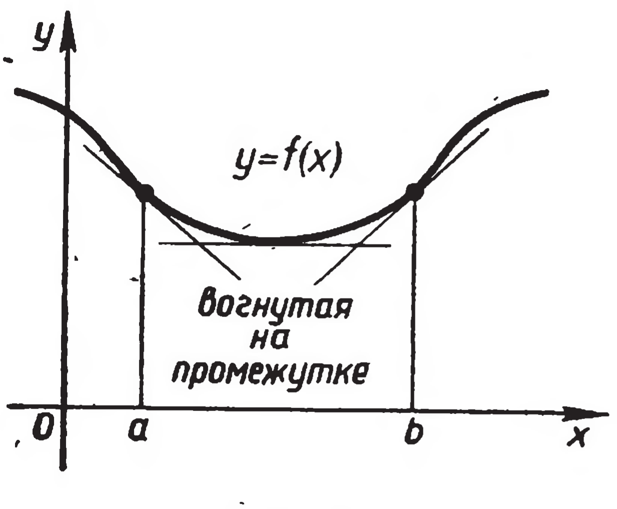

Рис. 23

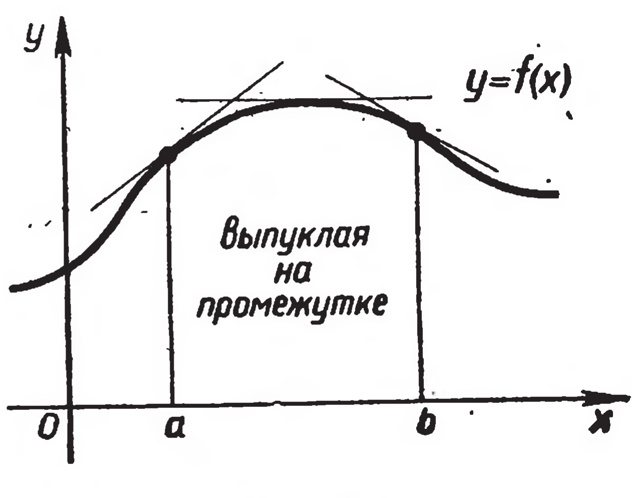

Рис. 24

6. $y = a^x$ (см. рис. 3). Функция вогнута на $]-\infty; +\infty[$.

7. $y = \log_a x$ (см. рис. 4). Функция выпукла на $]0; +\infty[$ при $a > 1$ и вогнута на $]0; +\infty[$ при $0 < a < 1$.

8. $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 7). Функция вогнута на $\left]\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right[$ и выпукла на $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right[$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

9. $y = \operatorname{arctg} x$ (см. рис. 11). Функция выпукла на $]0; +\infty[$ и вогнута на $]-\infty; 0[$.

10. $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис. 14). Функция вогнута при $a > 0$ на $]-\infty; +\infty[$ и выпукла при $a < 0$ на $]-\infty; +\infty[$.

Экстремумы

Точка x_0 называется точкой локального максимума (или просто максимума) для функции $f(x)$, если значение функции в этой точке больше, чем значения функции в ближайших соседних точках (рис. 25). Точка x_0 называется точкой локального минимума (или просто минимума) для функции $f(x)$, если значение функции в этой точке меньше, чем значения функции в ближайших соседних точках (рис. 25).

Для обозначения максимума или минимума существует общий термин «экстремум» (латинское слово: *крайний*). Дадим теперь определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$.

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Под окрестностью точки x_0 понимают интервал длиной 2ε с

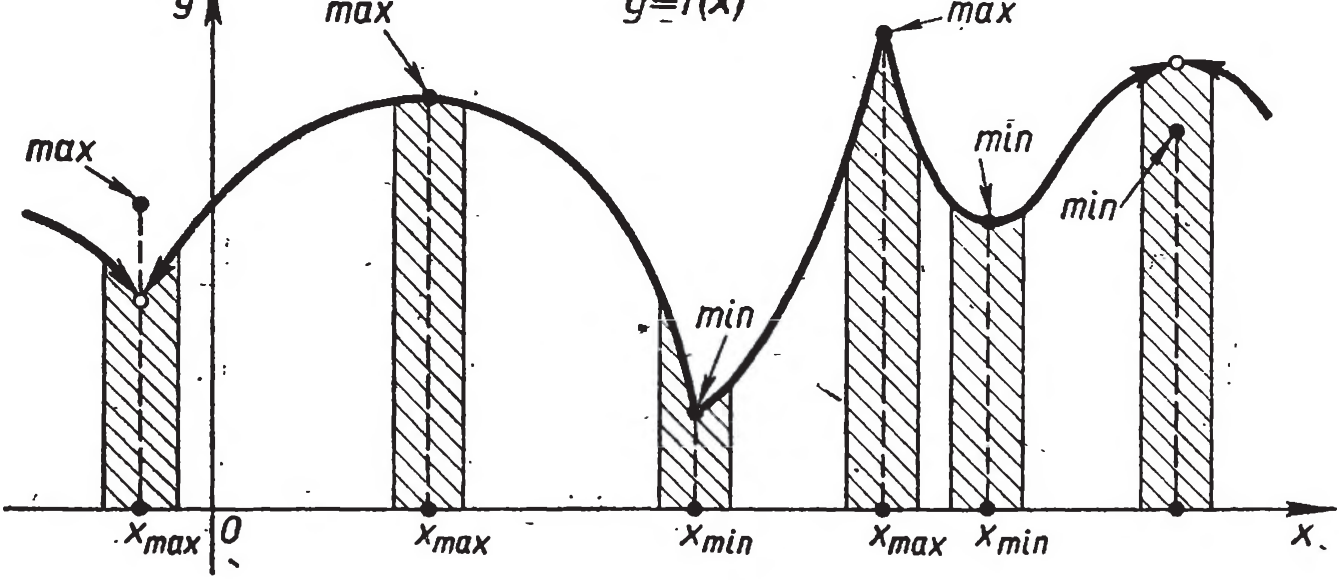

Рис. 25

центром в точке x_0, т. е. $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$, где ε — произвольное положительное число.

Функция $y = f(x)$ имеет локальный минимум в точке $x_0 \in \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Замечание. Приращение функции $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ в некоторой окрестности точки экстремума не меняет знак, т. е. положительно, если в точке x_0 — минимум, и отрицательно, если в точке x_0 — максимум. Этот факт следует из определения экстремума. Не все основные элементарные функции обладают экстремальными точками.

Степенная функция $y = x^n$ имеет минимум в точке $x = 0$ при $n = 2k > 1$ (например, $y = x^2$) (см. рис. 1) и при $0 < n = \frac{p}{q} < 1$, причем p — четное число, а q — нечетное число (например, $y = \sqrt[3]{x^2}$) (см. рис. 2).

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ (см. рис. 14) имеет минимум в точке $x_A = -\frac{b}{2a}$ при $a > 0$ и имеет максимум в точке $x_A = -\frac{b}{2a}$ при $a < 0$.

Функция $y = \sin x$ (см. рис. 5) имеет максимумы ($y = 1$) в точках $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и минимумы ($y = -1$) в точках $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Функция $y = \cos x$ (см. рис. 6) имеет максимумы ($y = 1$) в точках $x_n = 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2$, и минимумы ($y = -1$) в точках $x_k = \pi + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Предел функции

Функция $y = f(x)$ имеет предел, равный A при $x \to a$, если с приближением значения аргумента x к числу a значение функции $f(x)$ как угодно близко приближается к числу A. Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

В самой точке $x = a$ функция может и не быть определена. Такова, например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$. Как известно, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, хотя в точке $x = 0$ значение функции не определено. Дадим определение предела функции.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В определении предела функции не указывается, каким образом аргумент x стремится к числу a. Если предел функции в точке a существует, то он не зависит, стало быть, от способа приближения аргумента x в точке a. Пусть переменная величина x обозначает движущуюся точку на оси абсцисс. Тогда движение этой точки к a может происходить справа или слева. Результат движения точки справа к a будем обозначать $a+0$, а результат движения слева к a будем обозначать $a-0$, где знаки $+0$ и -0 играют роль указателей направления движения точки к a. В обоих случаях, естественно, результатом движения точек будет число a (рис. 26). Дадим определение для общей ситуации.

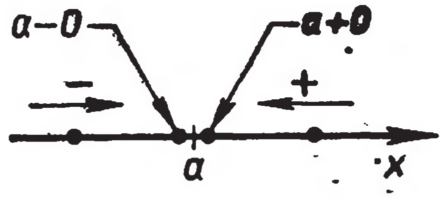

Рис. 26

Определение. Число B называется правым пределом функции $f(x)$ при стремлении x к точке a справа (т. е. по значениям $x > a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Правый предел символически обозначают так: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = B$.

Число C называется левым пределом функции $f(x)$ при стремлении x к точке a слева (т. е. по значениям $x < a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - a < 0$, выполняется неравенство $|f(x) - C| < \varepsilon$.

Обозначение левого предела: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = c$.

Из определения предела функции вытекает следующее утверждение. Если предел функции в точке a существует, то существуют и равны между собой левый и правый пределы функции в этой точке. Верно и обратное. Если левый и правый пределы функции в точке a существуют и равны числу A, то предел функции в точке a существует и тоже равен A.

Рассмотрим, однако, функцию $y = \dfrac{1}{x}$ в окрестности точки $x = 0$. Для такой функции в точке $x = 0$ не существует никакого конечного предела. В этом случае вводят специальное определение предела.

Определение. Говорят, что $\lim\limits_{x \to a} f(a) = \infty$, если для любого числа $D > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > D$.

Функция $f(x)$ при x, стремящемся к a, называется бесконечно большой. Вместо записи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ употребляется и такая запись: $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ ($f(x)$ стремится к бесконечности, когда x стремится к a).

По существу, тем самым к множеству R действительных чисел присоединяют число, большее любого действительного числа, так что окрестность отвечающей ему бесконечно удаленной точки оси ординат есть множество чисел y, для которых $|y| > D$, где D—любое положительное число. (Окрестность бесконечно удаленной точки оси ординат и саму эту точку можно наглядно представить себе, если вообразить, что концы оси y соединены. Тогда точка соединения и будет бесконечно удаленной точкой.) Неравенство $|y| > D$ распадается на два неравенства: $y > D$ и $y < -D$, что графически означает наличие двух полуокрестностей. Таким образом, бесконечно удаленная точка оси y раздваивается на две точки, которые обозначают $+\infty$ и $-\infty$. Аналогично бесконечно удаленная точка оси x раздваивается на две точки $+\infty$ и $-\infty$, имеющие каждая свою полуокрестность.

Очень важным понятием в теории пределов является понятие бесконечно малой.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Таковы, например, функции $\sin x$, x^2, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ при $x \to 0$; $\log_a x$ при $x \to 1$; $\cos x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Особо выделим понятие функции, бесконечно малой на бесконечности.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой на бесконечности, если $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Согласно определению значения функции $\alpha(x)$ по абсолютной величине становятся и продолжают оставаться меньше любого наперед заданного положительного числа, как только значения аргумента по абсолютной величине становятся достаточно большими.

Непрерывность

Если при постепенном изменении аргумента функция также меняется постепенно, то говорят, что функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента отвечает малое изменение функции. Дадим определение.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму точку) и предел функции в точке x_0 существует и равен значению функции в самой этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A = f(x_0) = f[\lim_{x\to x_0} x].$$

Из определения следует, что приращение функции $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ стремится к нулю при приращении аргумента Δx, стремящемся к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} [f(x) - f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале, если она определена на этом интервале и непрерывна в каждой точке интервала.

Геометрически непрерывность функции на интервале означает, что график этой функции на данном интервале есть сплошная линия без скачков и разрывов. Другими словами, отдельные точки на графике непрерывной (на интервале) функции можно (!!!) (на данном интервале) соединять сплошной линией.

Если в каких-либо точках интервала функция не является непрерывной, то такие точки называются точками разрыва.

Примеры. 1. Функция $y=\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$, в которой функция не определена. Таким образом, точка $x=0$ есть точка разрыва функции $y=\frac{\sin x}{x}$, так как в определении непрерывной в точке функции участвует значение функции в данной точке, а оно в точке $x=0$ не определено.

2. Точкой разрыва функции $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ служит точка $x=0$, в которой пределы функции слева и справа существуют, но не равны между собой, т. е. предел функции в точке $x=0$ не существует.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=1;\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+1}=0.$$

3. Точками разрыва функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ будут точки $x=1$ и $x=-1$, в которых значения функции не определены и, следовательно, не выполняется определение непрерывности функции в точке.

Замечание. Элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены. Отсюда следует, что точками разрыва элементарных функций могут служить только точки, в которых эти функции не определены (пример 3).

§ 4. АСИМПТОТЫ

Определение. Если расстояние δ от точки M кривой $y=f(x)$ до некоторой определенной прямой при $x\to x_0$ и неограниченном удалении точки M от начала координат стремится к нулю, то эта прямая называется асимптотой кривой.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Если в определении асимптоты x_0 — конечное число, то соответствующая асимптота называется вертикальной (рис. 27). При этом в точке x_0 хотя бы один из пределов (левый или правый) должен равняться $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Если в определении асимптоты x_0 есть $+\infty$ или $-\infty$, то соответствующая асимптота будет либо горизонтальной (рис. 28), либо наклонной (рис. 29).

I. Прямая $y=b$ служит горизонтальной асимптотой для графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$. Если же равен числу B только один из этих пределов, то прямая

$y = b$ является горизонтальной асимптотой для соответствующей части графика функции $y = f(x)$.

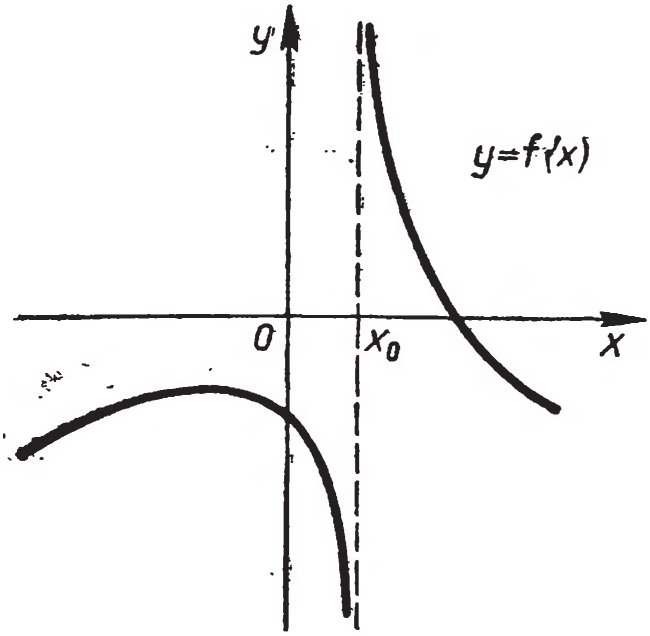

Рис. 27

Примеры. 1. $y = 4 + \frac{1}{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right) = 4$, то $y = 4$ есть горизонтальная асимптота для данного графика.

2. $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$, то $y = 1$ есть горизонтальная асимптота для графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

3. $y = 2^{-x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} = +\infty$, то $y = 0$ есть горизонтальная асимптота для правой ветви графика.

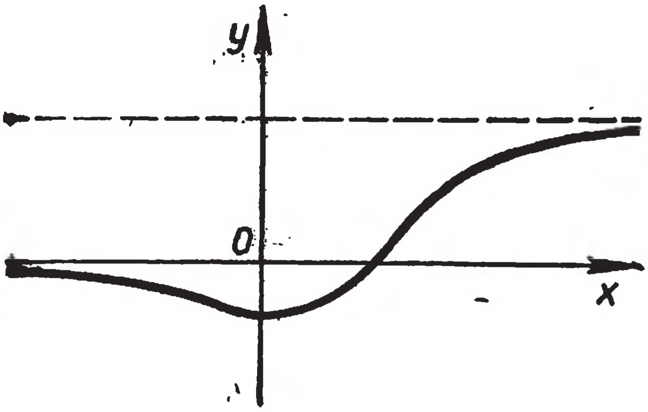

Рис. 28

II. Прямая $y = kx + b$ служит наклонной асимптотой для графика функции $y = f(x)$, если выполняются условия:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = b$.

Если же формулы а) и б) верны только для $x \to +\infty$ или только для $x \to -\infty$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой для соответствующей части графика функции.

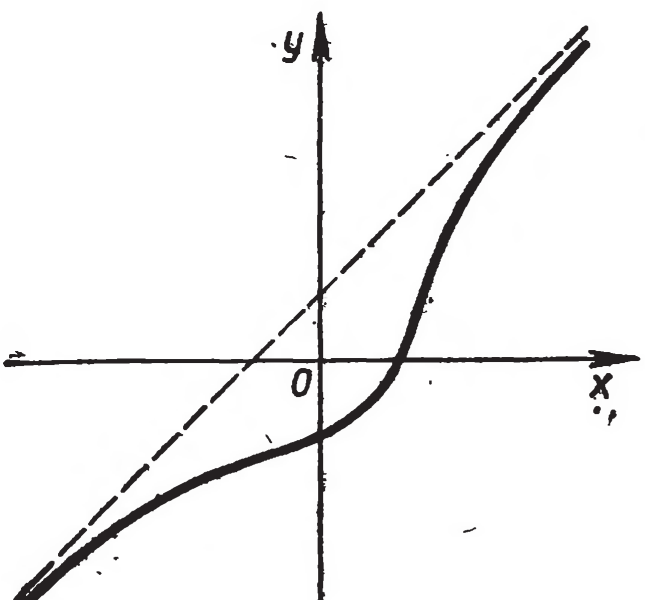

Рис 29.

Примеры. Найдем наклонные асимптоты для графиков следующих функций:

1. $y = x + \frac{1}{x}$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Прямая $y=x$ служит наклонной асимптотой для графика функции $y=x+\frac{1}{x}$.

2. $y=\frac{|x|(x-1)}{x+1}$.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|(x-1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x+1}\right)=-2.$$

Прямая $y=x-2$ является наклонной асимптотой для правой ветви графика данной функции.

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)(x-1)}{x(x+)}=-1;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)(x-1)+x(x+1)}{x+1}=2.$$

Прямая $y=-x+2$ является наклонной асимптотой для левой ветви графика функции $y=\frac{|x|(x-1)}{x+1}$.

§ 5. ПРОИЗВОДНАЯ. ЭКСТРЕМУМ

Определение. Предел отношения приращения функции $\Delta y=y-y_0$ к приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$ при приращении аргумента Δx, стремящемся к нулю, называется производной и обозначается $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

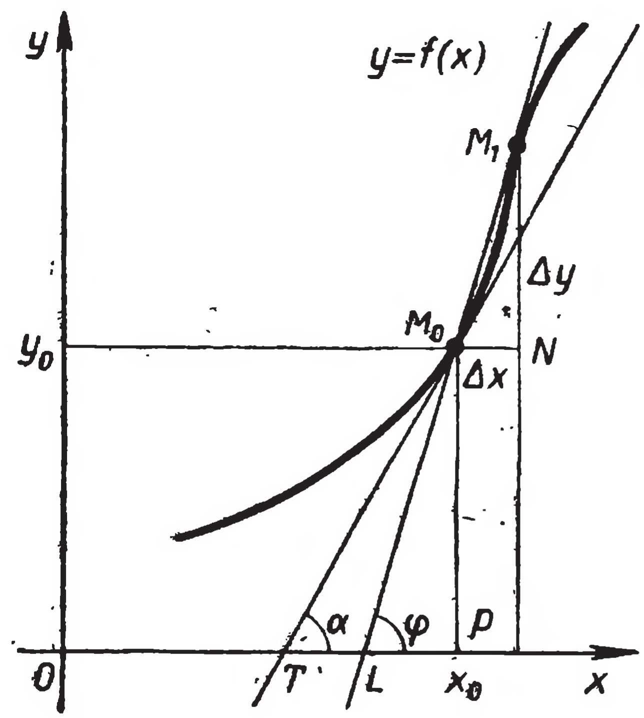

Рис. 30

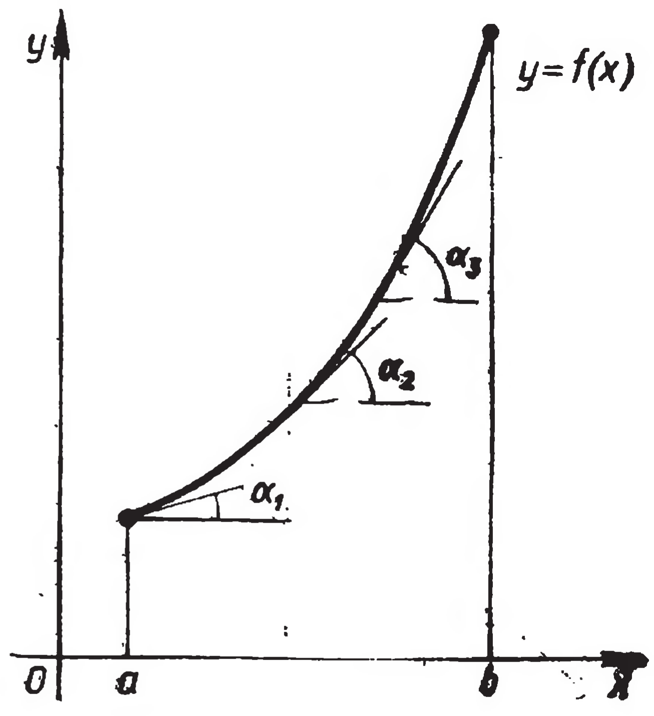

Рис. 31

При этом подразумевается, что указанный предел существует. Геометрически производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) (рис. 30), или, что то же самое, тангенсу угла наклона указанной касательной к оси x, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 30).

Дадим определение касательной. Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей M_0M_1, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к совпадению с точкой M_0.

Из ΔM_1M_0N следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi$ — угловой коэффициент секущей. Угловой же коэффициент касательной получается отсюда путем перехода к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$

В последующем изложении нам потребуется довольно большое число теорем из курса математического анализа, доказательства которых мы опускаем.

Отметим, что если функция в точке x_0 имеет производную, то в этой точке функция непрерывна.

Если функция имеет производную во всех точках некоторого интервала, то она непрерывна на данном интервале. Таким образом, чтобы доказать непрерывность функции на некотором интервале, часто бывает удобно вычислить производную этой функции и показать, что она существует на данном интервале. Однако, если производная в точке не существует, это не означает, что функция в этой точке обязательно разрывна. Непрерывная в точке функция может и не иметь в этой точке производной. Такова, например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ непрерывна, хотя $\lim\limits_{x\to 0} y' = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \infty$, т. е. производная функции не существует в точке $x = 0$. Следующее утверждение позволяет судить о монотонности функции на интервале.

Пусть $y = f(x)$ имеет производную на интервале. Тогда, если на всем интервале:

1) $f'(x) > 0$, то $f(x)$ монотонно возрастает на интервале (рис. 31);

2) $f'(x) < 0$, то $f(x)$ монотонно убывает на интервале (рис. 32);

3) $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv \mathrm{const}$ на интервале (рис. 33). Условие $f'(x) > 0$ ($\operatorname{tg}\alpha > 0$) в каждой точке интервала означает геометрически, что касательная к кривой в любой ее точке образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол (рис. 31).

Условие $f'(x) < 0$ ($\operatorname{tg}\alpha < 0$) в каждой точке интервала озна-

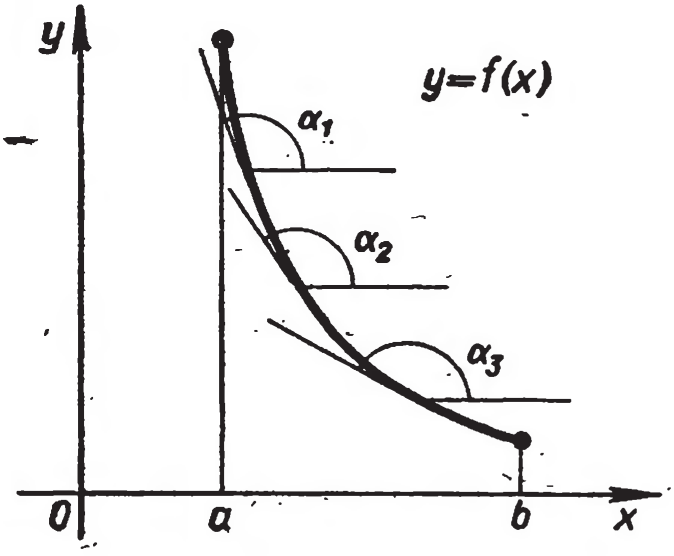

Рис. 32

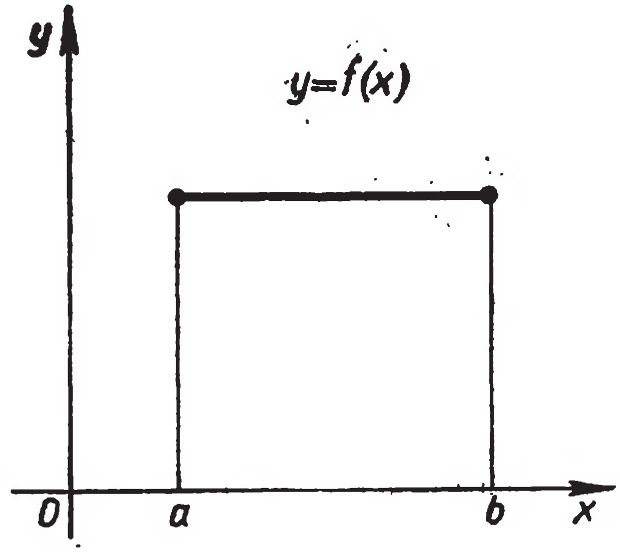

Рис. 33

чает, что касательная к кривой в каждой ее точке образует с положительным направлением оси абсцисс тупой угол (рис. 32.) Таким образом, для исследования функции на монотонность необходимо найти производную (там, где она существует, функция заведомо будет непрерывной) и определить интервалы, на которых производная положительна (монотонное возрастание функции) и отрицательна (монотонное убывание функции). Знание производной на интервале позволяет решить вопрос о существовании и отыскании экстремальных точек.

Сформулируем необходимое условие существования экстремума. Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 достигает экстремума, то производная $f'(x_0)$ либо не существует (рис. 34), либо равна нулю (рис. 35).

Точки, в которых производная обращается в нуль или не существует, называются критическими точками I рода. В этих точках экстремум может быть, но может и не быть. Решает этот вопрос достаточный признак существования экстремума (так называемое «правило знаков»).

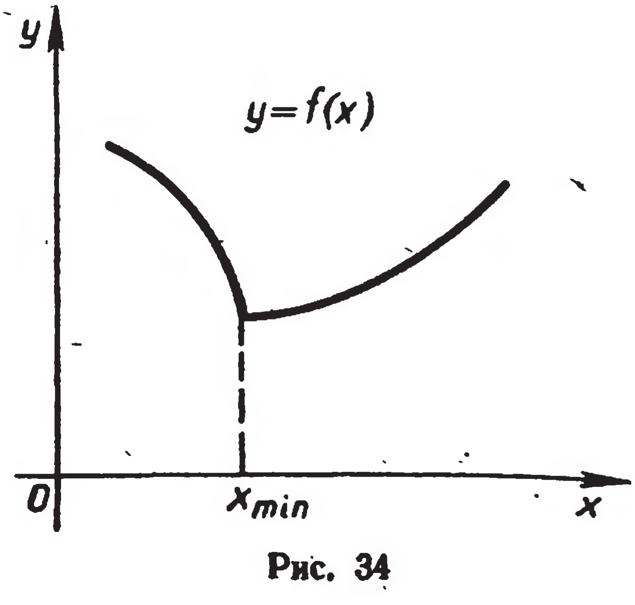

Рис. 34

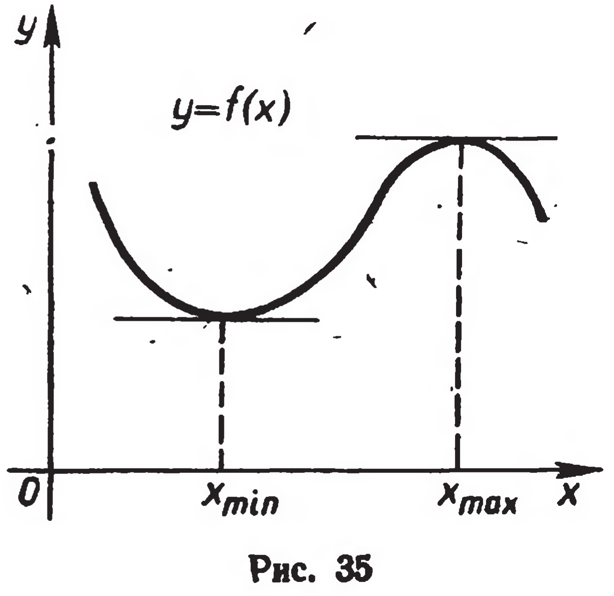

Рис. 35

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку, и производная $f'(x)$ существует в окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Тогда, если:

1) $f'(x) > 0$ (знак $+$) при $x < x_0$ и $f'(x < 0)$ (знак —) при $x > x_0$, то функция в точке x_0 достигает максимума;

2) $f'(x) < 0$ (знак —) при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ (знак $+$) при $x > x_0$, то функция в точке x_0 достигает минимума;

3) $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Таким образом, точка максимума отделяет промежуток монотонного возрастания функции от участка монотонного убывания, а точка минимума отделяет промежуток монотонного убывания от участка монотонного возрастания (если двигаться в положительном направлении оси абсцисс).

Схема применения производной для отыскания интервалов монотонности и экстремумов будет следующая:

1) находим производную $f'(x)$;

2) находим интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$ (интервалы монотонности функции $f(x)$), т. е. решаем неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$;

3) находим критические точки I рода, т. е. точки, в которых $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует;

4) с помощью достаточного признака исследуем функцию в критических точках I рода на экстремум;

5) вычисляем значения функции в экстремальных точках.

Примеры **1.** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Находим производную: $y' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} > 0$, откуда $x < 0$; таким образом, при $x < 0$ производная положительна (знак $+$);

б) $y' < 0$, или $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0$, откуда $x > 0$, т. е. при $x > 0$ производная отрицательна (знак —).

Приравнивая к нулю производную, находим критическую точку I рода:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Удобно рисовать следующую схему (рис. 36) (стрелками $\nearrow$ и $\searrow$ обозначим монотонное возрастание и убывание функции на соответствующих интервалах). Из схемы (рис. 36) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет максимум (производная меняет знак с $+$ на —). Кроме того, на интервале $]-\infty; 0[$ функция монотонно возрастает, а на интервале $]0; +\infty]$ монотонно убывает.

Вычисляем значение функции в точке максимума:

$$\text{при } x = x_{\max} = 0 \quad y = y_{\max} = \frac{1}{x^2_{\max}+1} = 1.$$

2. $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

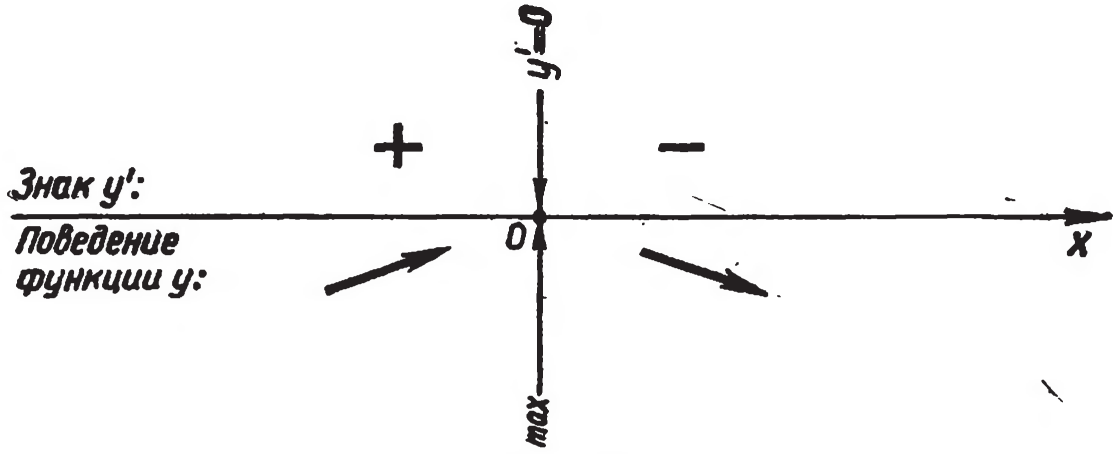

Рис. 36

Находим производную: $y' = 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) > 0$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$ и окончательно получим: $1 < x < 2$, $x > 3$. Таким образом, на интервалах $]1; 2[\cup]3; +\infty[$ производная положительна (знак $+$);

б) $y' < 0$, или $2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) < 0$, откуда $x < 1$, $2 < x < 3$ т. е. на интервалах $]-\infty; 1[\cup]2; 3[$ производная отрицательна (знак $-$).

Приравнивая к нулю производную, находим критические точки I рода:

$y' = 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Рисуем схему (рис. 37), из которой следует, что в точке $x = 1$ функция имеет минимум, в точке $x = 2$ — максимум, в точке $x = 3$ — минимум.

Кроме того, на интервалах $]-\infty; 1[\cup]2; 3[$ функция монотонно убывает, а на интервалах $]1; 2[\cup]3; +\infty[$ монотонно возрастает.

Значения функции в экстремальных точках:

$$\text{при } x = x_{\min} = 1 \quad y = y_{\min} = 0;$$
$$\text{при } x = x_{\max} = 2 \quad y = y_{\max} = 1;$$
$$\text{при } x = x_{\min} = 3 \quad y = y_{\min} = 0.$$

3. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Находим производную: $y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$.

Решаем неравенства:

$$y' > 0, \text{ или } \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} > 0, \text{ откуда } x > 0,\ x \neq 1;$$

$$y' < 0, \text{ или } \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} < 0, \text{ откуда } x < 0,\ x \neq -1,$$

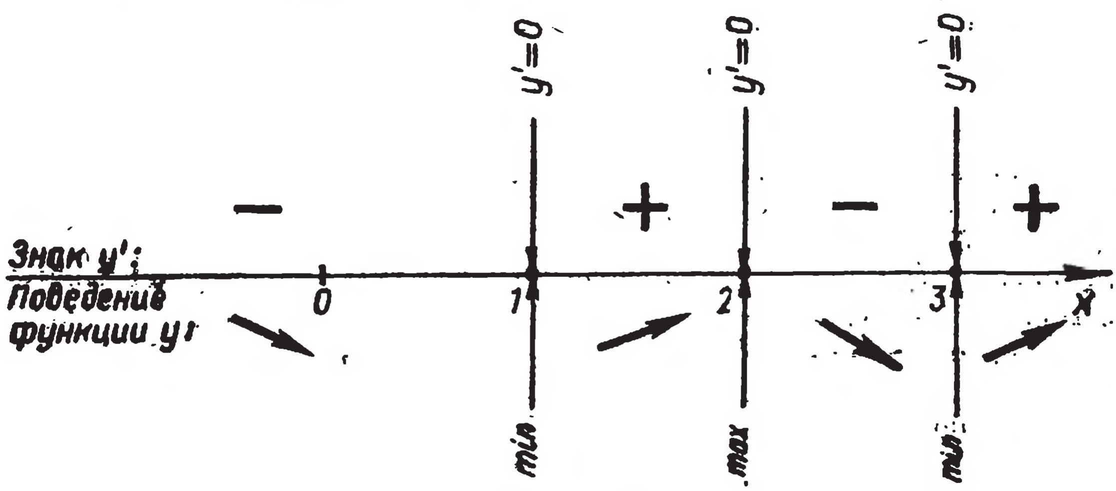

Рис. 37

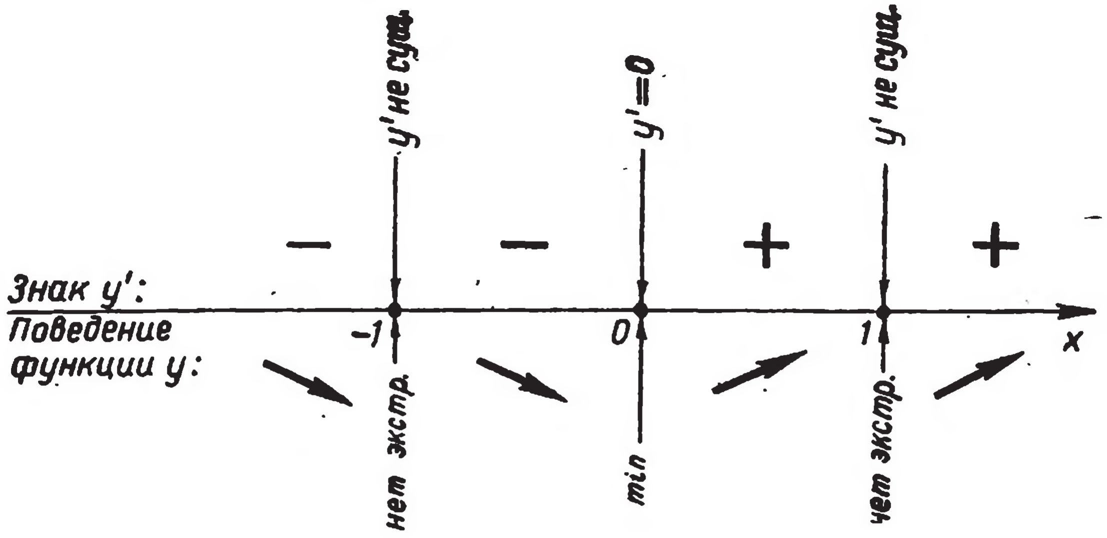

Рис. 38

Производная равна нулю в точке $x = 0$ и не существует в точках $x = -1$, $x = +1$.

Таким образом, имеем три критические точки I рода: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = +1$. Рисуем схему (рис. 38), из которой следует, что в точке $x_2 = 0$ функция имеет минимум, а в точках $x_1 = -1$ и $x_3 = 1$ экстремума нет. Кроме того, на интервалах $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ функция монотонно убывает, а на интервалах $]0; +1[\cup]1; +\infty[$ функция монотонно возрастает.

Находим значение функции в экстремальной точке:

$$\text{при } x = x_{\min} = 0 \quad y = y_{\min} = -1.$$

§ 6. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Если первая производная y' существует на некотором интервале X, то тем самым каждому x из этого интервала ставится в соответствие производная данной функции. Это однозначное соответствие является новой функцией $x \to f'(x)$. Может оказаться, что для указанной новой функции в некоторой точке $x_0 \in X$ существует производная. Тогда эта производная называется второй производной от первоначальной функции в упомянутой точке и обозначается символом $y''(x_0)$ или $f''(x_0)$.

Применение второй производной к выяснению выпуклости (вогнутости) графика функции на интервале основано на следующей теореме из курса математического анализа.

Т е о р е м а. Если вторая производная $f''(x)$ существует на интервале $]a; b[$ и не меняет знака на этом интервале, то

1) при $f''(x) > 0$ (знак $+$) функция $f(x)$ вогнута на интервале $]a; b[$;

2) при $f''(x) < 0$ (знак $-$) функция $f(x)$ выпукла на интервале $]a; b[$.

Из теоремы следует, что для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости функции нужно найти вторую производную и решить неравенства:

$$\text{а) } f''(x) < 0, \qquad \text{б) } f''(x) > 0.$$

О п р е д е л е н и е. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ называется ее точкой перегиба, если она отделяет интервал, на котором функция выпукла, от интервала, на котором она вогнута (рис. 39).

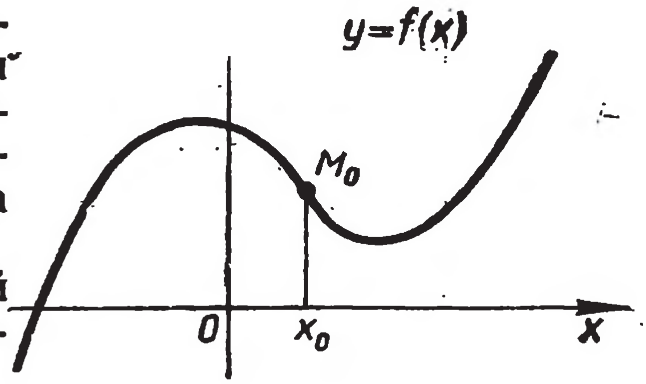

Рис. 39

Сформулируем необходимый признак существования точки перегиба.

Если функция в точке x_0 имеет перегиб, то вторая производная в этой точке либо не существует, либо равна нулю.

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует, называются критическими точками II рода. В этих точках перегиб может быть, а может и не быть. Решает этот вопрос достаточный признак существования точки перегиба (так называемое «правило дождя»).

Пусть функция определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку. Пусть далее вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Тогда, если:

$$\begin{matrix} 1)\ f''(x) < 0 \text{ при } x < x_0, \\ 2)\ f\ (x) > 0 \text{ при } x > x_0 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} 1)\ f''(x) > 0 \text{ при } x < x_0, \\ 2)\ f''(x) < 0 \text{ при } x > x_0, \end{matrix}$$

то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ будет точкой перегиба кривой $y = f(x)$. Схема применения второй производной для отыскания интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба совершенно аналогична схеме отыскания экстремумов и интервалов монотонности, только вместо первой производной рассматривается вторая.

П р и м е р ы. 1. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$. Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} > 0$, откуда $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $y'' < 0$, или $\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} < 0$, откуда $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Приравнивая к нулю вторую производную, находим критические точки II рода: $y'' = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0$, откуда $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Из схемы (рис. 40) следует, что в точках $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы. Кроме того, на интервалах $\left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$ функ-

3 Заказ 5912

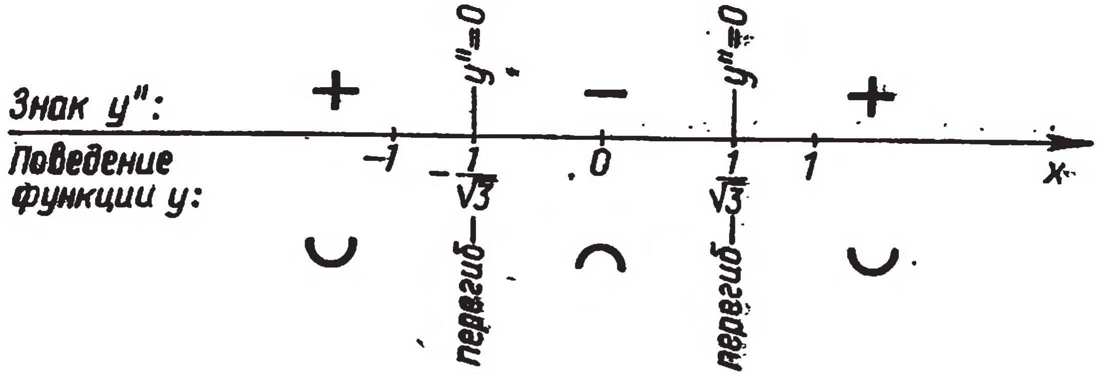

Рис. 40

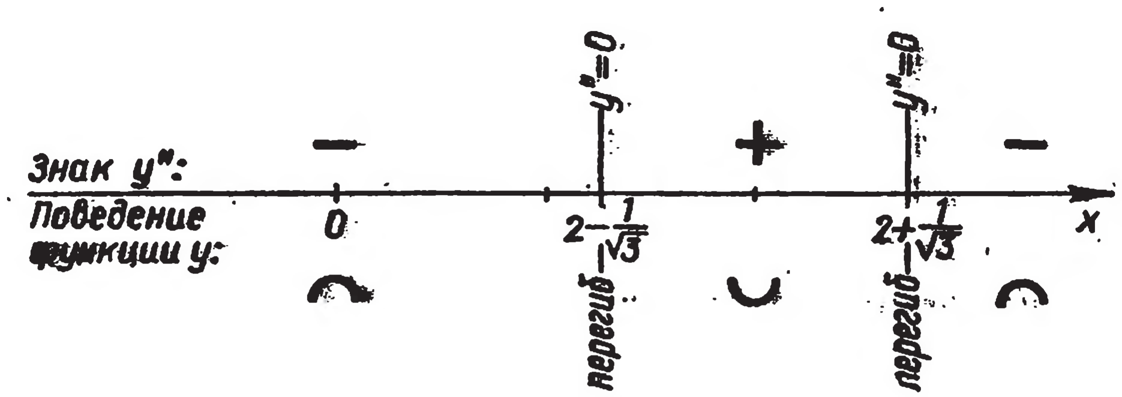

Рис. 41

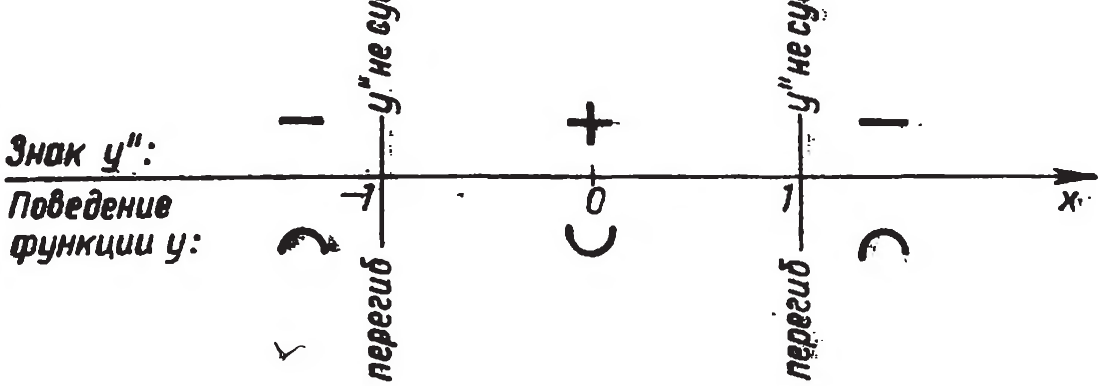

Рис. 42

ция вогнута, а на интервале $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ выпукла.

Ординаты точек перегиба: $y_1 = y_2 = \frac{3}{4}$.

2. $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

Находим вторую производную: $y'' = 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right)$. Решаем неравенства.

2) $y'' > 0$, или $12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) > 0$, откуда $x > 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x < 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, на интервалах $\left]-\infty, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ функция вогнута, на интервале $\left]2 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ функция выпукла. Приравнивая к нулю вторую производную, находим критические точки II рода: $y'' = 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) = 0$, откуда $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из схемы (рис. 41) следует, что в точках $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы.

Ординаты точек перегиба: $y_1 = (x_1^2 - 4x_1 + 3)^2 = \frac{4}{9}$; $y_2 = (x_2^2 - 4x_2 + 3)^2 = \frac{4}{9}$.

3. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Находим вторую производную: $y'' = -\frac{2}{9}\,\frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}$. Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $-\frac{2}{9}\,\frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} > 0$, откуда $-1 < x < 1$;

б) $y'' < 0$, или $-\frac{2}{9}\,\frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} < 0$, откуда $x < -1$; $x > 1$.

В точках $x_1 = -1$, $x_2 = +1$ вторая производная не существует (знаменатель обращается в нуль); сама же функция в этих точках существует, непрерывна и принимает значение, равное нулю.

Учитывая, что ни в одной точке действительной оси вторая производная в нуль не обращается, критическими точками II рода будут только точки $x_1 = 1$, $x_2 = +1$.

Из схемы (рис. 42) следует, что в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ функция имеет перегибы.

Кроме того, на интервалах $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ функция выпукла, а на интервале $]-1; 1[$ вогнута. Ординаты точек перегиба: $y_1 = y_2 = 0$.

§ 7. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКОВ

Методы математического анализа позволяют строить достаточно точный график заданной функции, если только удается хорошо изучить свойства этой функции.

Изучение свойств функции при построении графика целесообразно проводить по следующей схеме:

I. Нахождение области определения и точек разрыва; вычисление значений функции (или соответствующих пределов) в граничных точках области определения.

II. Определение четности или нечетности, периодичности функции.

III. Определение нулей функции и интервалов знакопостоянства.

IV. Нахождение асимптот.

V. Исследование функции на экстремум, определение интервалов монотонности.

VI. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости.

Полезно каждый этап исследования функции по данной схеме сопровождать соответствующим построением.

Отметим, что эта далеко не полная схема позволяет тем не менее успешно строить графики подавляющего большинства функций, встречающихся на практике в школе, техникуме и техническом вузе.

§ 8. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ

Для иллюстрации указанной схемы рассмотрим примеры построения графиков функций следующих классов:

A. Степенные функции, заданные или в виде произведения многочленов, или в виде многочленов третьей и выше степени.

B. Дробно-рациональные функции. Так называются функции вида $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x.

C. Сумма (разность) функций.

D. Сложные функции. Так называются функции вида $y=\varphi[f(x)]$, где φ и f — любые из элементарных функций.

П р и м е р ы.

1. $y=x(x+1)(x-1)$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x-1) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x(x+1)(x-1) = -\infty.$$

II. Функция непериодическая, нечетная.

III. Функция имеет три нуля: $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенство $x(x+1)(x-1) > 0$.

Его решением служит объединение двух интервалов: $]-1; 0[\,\cup\,]1; +\infty[$.

Таким образом, функция положительна на интервалах $]-1; 0[\,\cup\,]1; +\infty[$ и отрицательна на интервалах $]-\infty; -1[\,\cup\,]0; 1[$ (последнее следует из нечетности функции).

IV. Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)(x+1)}{x} = \infty.$$

Таким образом, наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Вертикальных асимптот также не имеется (нет точек разрыва).

V. Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 1$.

Решаем неравенства: а) $y' > 0$, или $3x^2 - 1 > 0$, откуда $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $y' = 0$, или $3x^2 - 1 < 0$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, на интервалах $\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\,\cup\,\left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$ производная положительна, на интервале $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ производная отрицательна.

Приравнивая к нулю производную, находим критические точки I рода: $y' = 3x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Рисуем схему (рис. 43), из которой следует, что в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум, а в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — минимум.

Отметим, кроме того, что на интервалах $\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\,\cup\,\left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$ функция монотонно возрастает, а на интервале $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ функция монотонно убывает.

Значения функции в экстремальных точках:

при $x_{\max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; при $x_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $y_{\min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

VI. Находим вторую производную функции: $y'' = 6x$. Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $6x > 0$, откуда $x > 0$;

б) $y'' < 0$, или $6x < 0$, откуда $x < 0$.

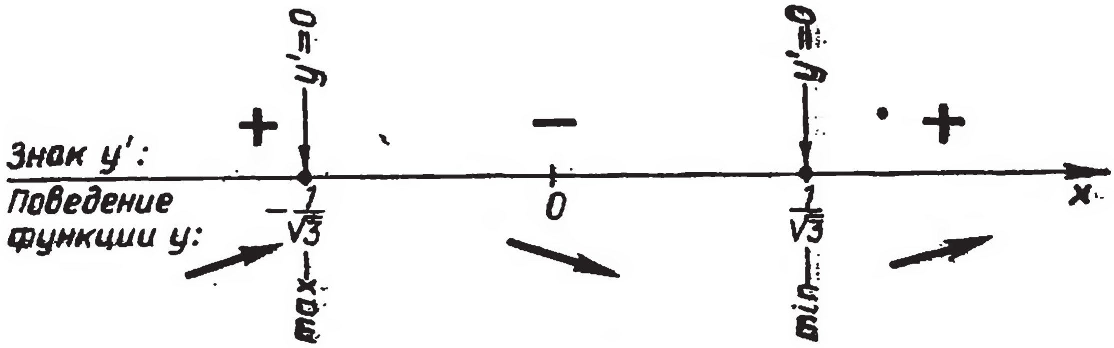

Рис. 43

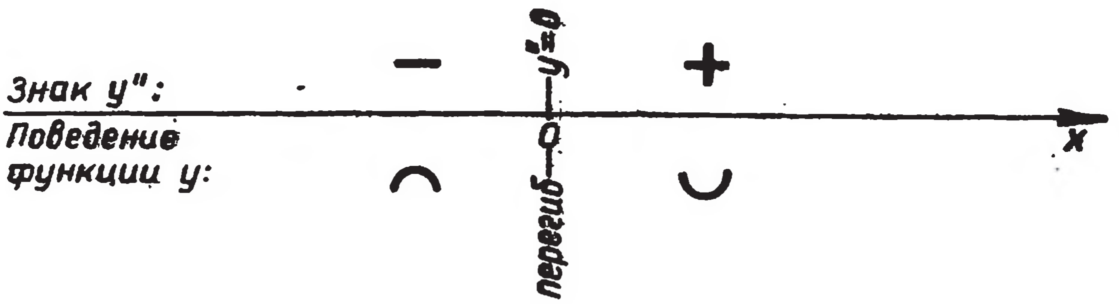

Рис. 44

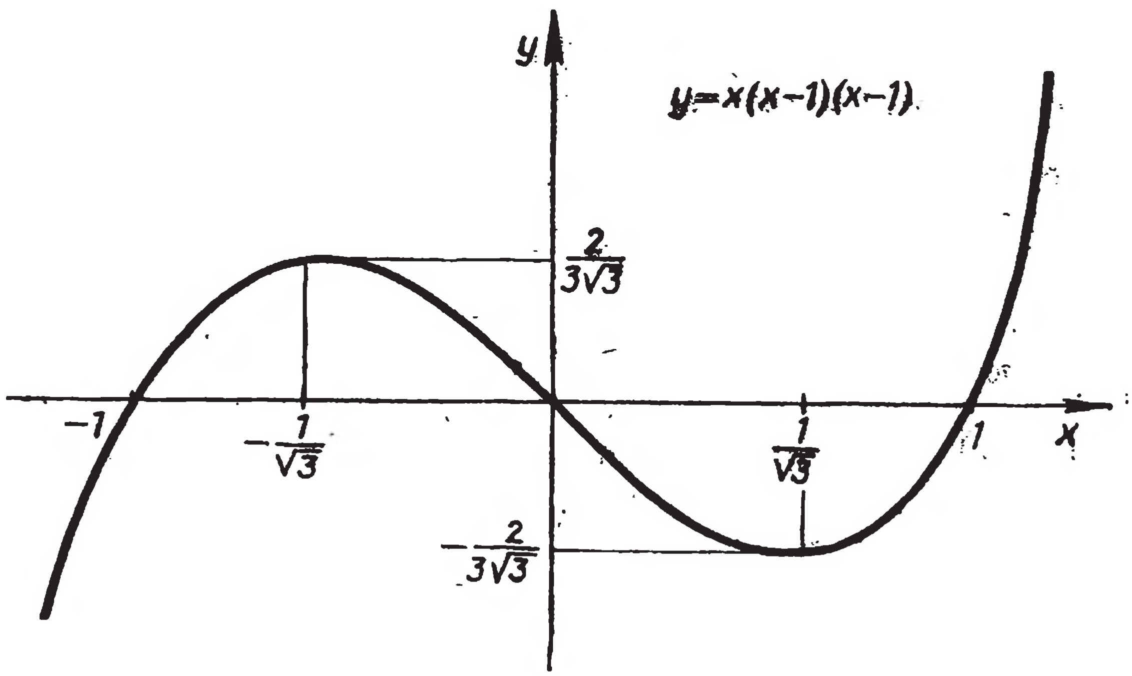

Рис. 45

Приравнивая к нулю вторую производную, найдем критическую точку II рода: $y'' = 6x = 0$, откуда $x = 0$.

Рисуем схему (рис. 44), из которой следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб (это также следует из нечетности функции). Кроме того, на интервале $]-\infty; 0[$ функция выпукла, а на интервале $]0; +\infty[$ вогнута. Ордината точки перегиба: $y_{пер} = 0$.

График функции представлен на рис. 45. При построении пользуемся симметрией графика относительно начала координат.

2. $y = (x^2 + 1)(x - 1)$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1)(x - 1) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 1)(x - 1) = -\infty.$$

II. Функция непериодическая, общего вида.

III. Функция имеет один нуль в точке $x = 1$.

IV. Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x} = \infty.$$

Наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Нет и вертикальных асимптот (нет точек разрыва).

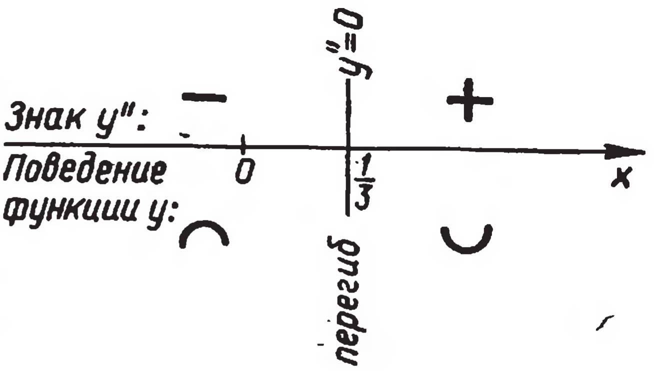

Рис. 46

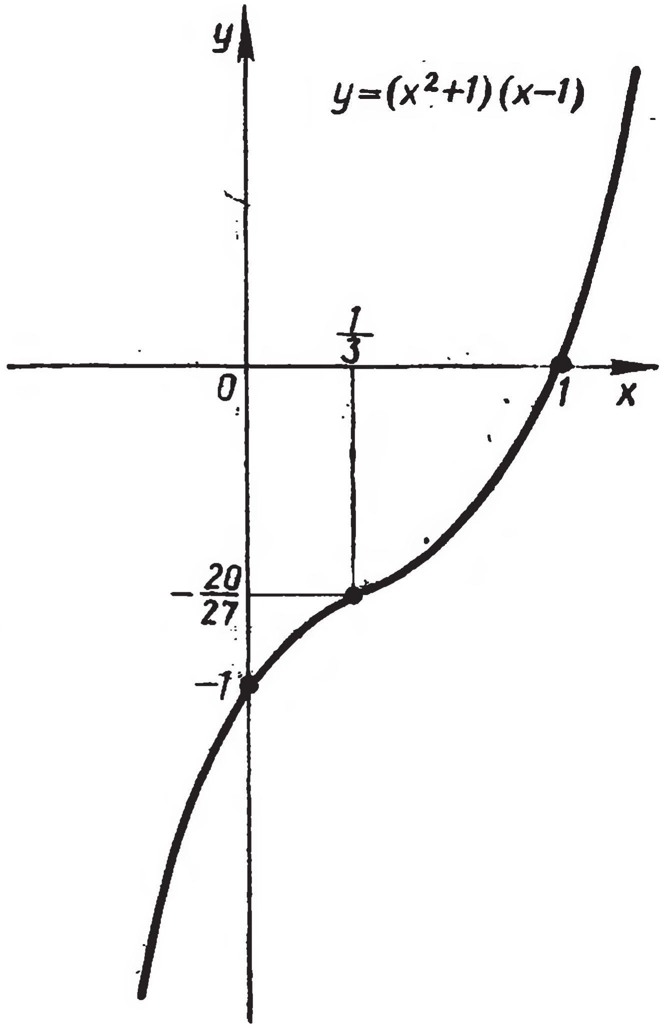

Рис. 47

V. Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 2x + 1$.

На всей числовой оси $y' = 3x^2 - 2x + 1 > 0$, т. е. функция монотонно возрастает. Экстремумов нет.

VI. Находим вторую производную: $y'' = 6x - 2$.

Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $6x - 2 > 0$, откуда $x > \frac{1}{3}$;

б) $y'' < 0$, или $6x - 2 < 0$, откуда $x < \frac{1}{3}$.

Приравнивая к нулю вторую производную, найдем критическую точку II рода: $y'' = 6x - 2$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

Из схемы (рис. 46) следует, что в точке $x = \frac{1}{3}$ функция имеет перегиб. На интервале $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ функция выпукла, а на интервале $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$ вогнута.

Ордината точки перегиба: $y_{пер} = -\frac{20}{27}$.

График функции представлен на рис. 47.

3. $y = x^4 - 2x^3 - 1$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 2x^3 - 1) = +\infty; \lim_{x \to -\infty} (x^4 - 2x^3 - 1) = +\infty.$$

II. Функция общего вида, непериодическая.

III. Нахождение нулей функции и интервалов знакопостоянства в данном случае затруднительно. Поэтому переходим к следующему пункту.

IV. Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x} = \infty.$$

Асимптот нет.

V. Найдем производную функции: $y' = 4x^3 - 6x^2$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $4x^3 - 6x^2 > 0$, откуда $x > \frac{3}{2}$.

Таким образом, на интервале $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ производная положительна.

б) $y' < 0$, или $2x^2(2x - 3) < 0$, откуда $x < 0$, $0 < x < \frac{3}{2}$.

На интервалах $\left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; \frac{3}{2}\right[$ производная отрицательна. Приравнивая к нулю производную, находим критические точки I рода: $y' = 4x^3 - 6x^2 = 0$, откуда $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

Из схемы (рис. 48) следует, что в точке $x = \frac{3}{2}$ функция имеет минимум. Отметим, что на интервалах $\left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; \frac{3}{2}\right[$ функция монотонно убывает, а на интервале $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ монотонно возрастает.

Ордината точки минимума: $y_{min} = -2\frac{11}{16}$.

VI. Находим вторую производную: $y'' = 12x^2 - 12x$.

Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $12x^2 - 12x > 0$, откуда $x < 0$, $x > 1$. Таким образом, на интервалах $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ вторая производная положительна.

б) $y'' < 0$, или $12x^2 - 12x < 0$, откуда $0 < x < 1$, т. е. на интервале $]0; 1[$ вторая производная отрицательна. Приравнивая к нулю вторую производную, находим критические точки II рода: $y'' = 12x^2 - 12x = 0$, откуда $x = 0$, $x = 1$.

Из схемы (рис. 49) следует, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция имеет перегибы. На интервалах $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ функция вогнута, а на интервале $]0; 1[$ выпукла. Ординаты точек перегиба: при $x = 0$ $y_{пер} = -1$; при $x = 1$ $y_{пер} = -2$. График функции представлен на рис. 50.

4. $y = -\frac{1}{5}x^5 + x + 4$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{5}x^5 + x + 4\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{5}x^5 + x + 4\right) = +\infty$.

II. Функция общего вида, непериодическая.

III. Нахождение нулей функции и интервалов знакопостоянства в данном случае затруднительно.

IV. Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{5}x^5 + x + 4}{x} = -\infty.$$

Асимптот нет.

V. Найдем производную функции: $y' = -x^4 + 1$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $-x^4 + 1 > 0$, откуда $-1 < x < 1$;

б) $y' < 0$, или $-x^4 + 1 < 0$, откуда $x < -1$; $x > 1$.

Приравнивая к нулю производную, находим критические точки I рода: $y' = -x^4 + 1 = 0$, откуда $x = -1$, $x = 1$.

Из схемы (рис. 51) следует, что в точке $x = -1$ функция имеет минимум, а в точке $x = 1$ — максимум. На интервалах $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ функция монотонно убывает, а на интервале $]-1; 1[$ монотонно возрастает.

Ординаты экстремальных точек:

при $x = -1$ $y_{min} = 3\frac{1}{5}$; при $x = 1$ $y_{max} = 4\frac{4}{5}$.

VI. Находим вторую производную: $y'' = -4x^3$.

На интервале $]-\infty; 0[$ вторая производная положительна, а на интервале $]0; +\infty[$ отрицательна. В точке $x = 0$ (критическая

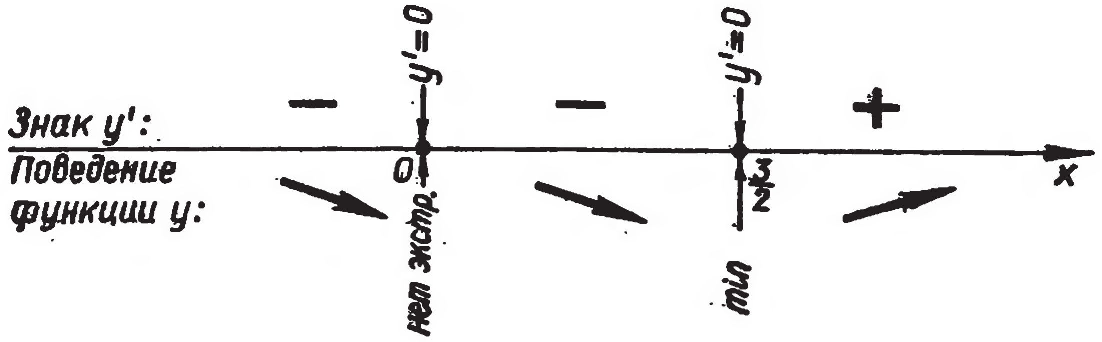

Рис. 48

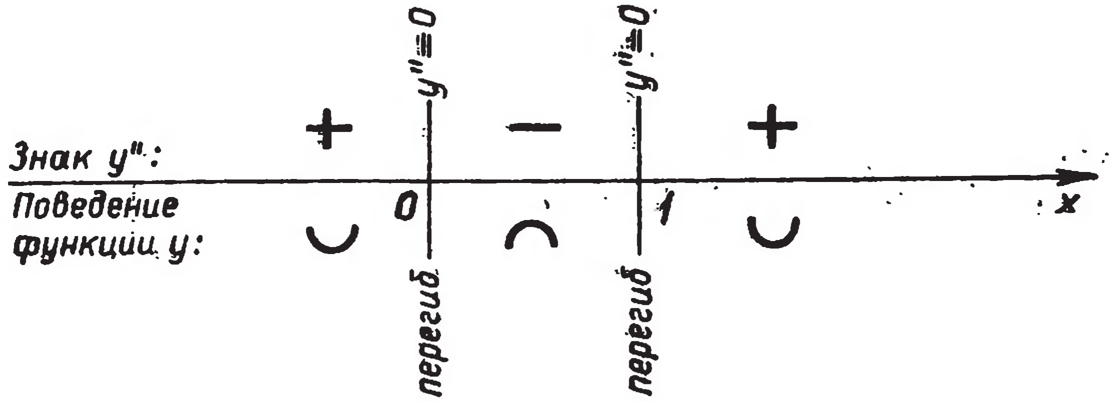

Рис. 49

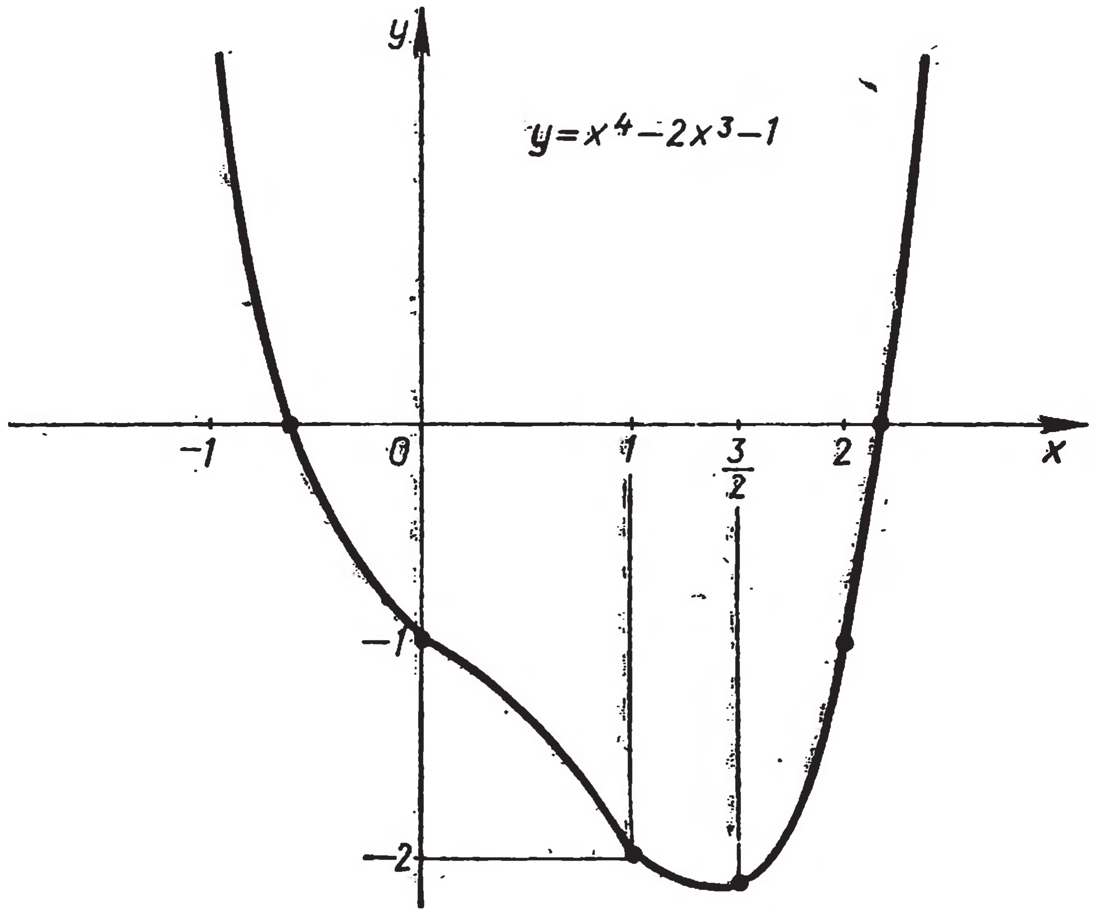

Рис. 50

точка II рода) вторая производная обращается в нуль. Из схемы (рис. 52) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб, на интервале $]-\infty; 0[$ функция вогнута, а на интервале $]0; +\infty]$ выпукла. Ордината точки перегиба $y_{\text{пер}} = 4$.

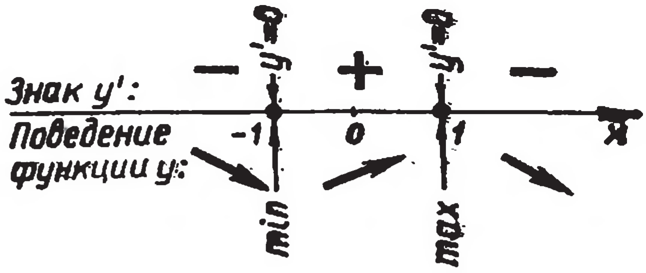

Рис. 51

График функции представлен на рис. 53.

5. $y = \dfrac{2x+1}{3-x}$.

I. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = 3$, в которой функция имеет разрыв.

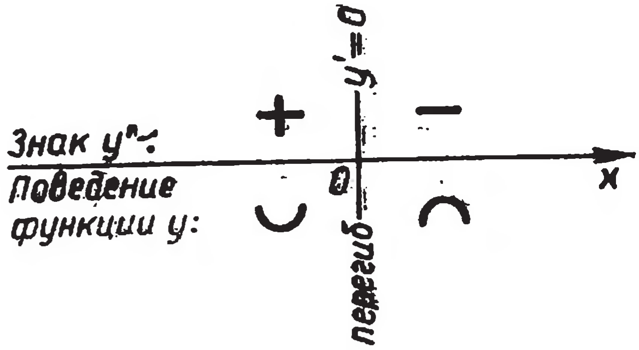

Рис. 52

Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2;$$

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{2x+1}{3-x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{2x+1}{3-x} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2.$$

Отсюда следует, что имеется вертикальная асимптота $x = 3$ и горизонтальная асимптота $y = -2$.

II. Функция общего вида, непериодическая.

III. Функция имеет один нуль в точке $x = -\dfrac{1}{2}$.

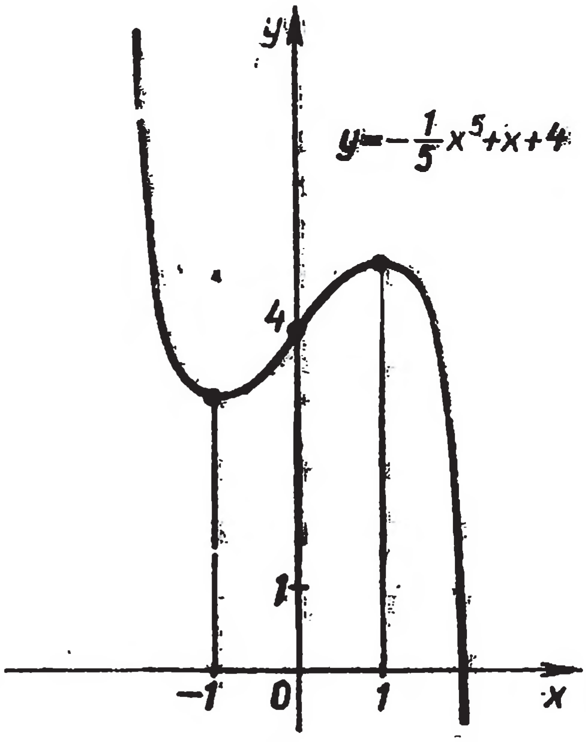

Рис. 53

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенства:

а) $y > 0$, или $\dfrac{2x+1}{3-x} > 0$,

откуда $-\dfrac{1}{2} < x < 3$;

б) $y < 0$, или $\dfrac{2x+1}{3-x} < 0$, откуда $x < -\dfrac{1}{2}$; $x > 3$.

Функция положительна на интервале $\left]-\frac{1}{2};\ 3\right[$ и отрицательна на интервалах $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup\left]3;\ +\infty\right[$.

IV. Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x(3-x)}=0;\ b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3-x}=-2.$$

Наклонных асимптот нет, есть вертикальная $x=3$ и горизонтальная $y=-2$.

V. Найдем производную функции: $y'=\frac{7}{(-x+3)^2}$.

Производная положительна всюду, где функция определена. Таким образом, функция монотонно возрастает на интервале $]-\infty,\ 3;[\cup]3;\ +\infty[$, экстремумов нет.

VI. Находим вторую производную: $y''=\frac{14}{(-x+3)^3}$.

Решаем неравенства:

а) $y''>0$, или $\frac{14}{(-x+3)^3}>0$, откуда $x<3$;

б) $y''<0$, или $\frac{14}{(-x+3)^3}<0$, откуда $x>0$.

Вторая производная в нуль нигде не обращается, точек перегиба нет. На интервале $]-\infty;\ 3[$ функция вогнута, а на интервале $]3;\ +\infty[$ выпукла.

График функции представлен на рис. 54.

6. $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$.

II. Функция непериодическая, нечетная.

III. Функция имеет один нуль в точке $x=0$.

Функция положительна на интервале $]0;\ +\infty[$ и отрицательна на интервале $]-\infty;\ 0[$.

IV. Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(x^2+1)}=0;\quad b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0.$$

Таким образом, имеется горизонтальная асимптота $y=0$.

V. Найдем производную функции $y'=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

Решаем неравенства:

а) $y'>0$, или $\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}>0$, откуда $-1<x<1$;

б) $y'<0$, или $\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}<0$, откуда $x<-1;\ x>1$.

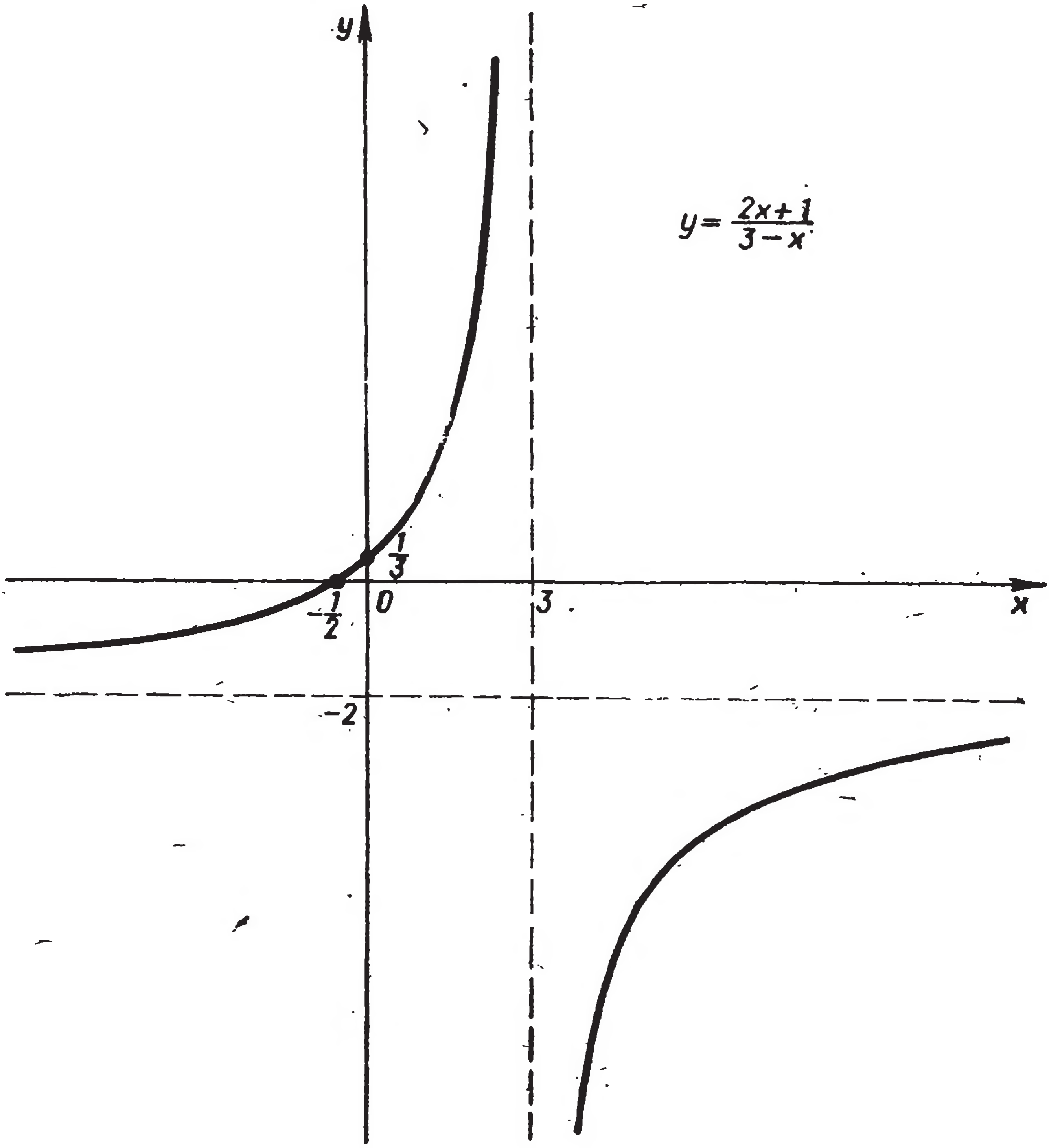

Рис. 54

Приравнивая к нулю производную, находим критические точки I рода: $y'=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0$, откуда $x=-1$; $x=1$.

Из схемы (рис. 55) следует, что в точке $x=-1$ функция имеет минимум, а в точке $x=1$ — максимум. На интервалах $]-\infty; -1[\,\cup\,]1; +\infty[$ функция монотонно убывает, а на интервале $]-1; 1[$ монотонно возрастает. Ординаты экстремальных точек: при $x=-1$ $y_{\min}=-1$; при $x=1$ $y_{\max}=1$.

VI. Находим вторую производную: $y''=\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$.

Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $\frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} > 0$, откуда $-\sqrt{3} < x < 0$; $x > \sqrt{3}$;

б) $y'' < 0$, или $\frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} < 0$, откуда $0 < x < \sqrt{3}$; $x < -\sqrt{3}$.

Приравнивая к нулю вторую производную, находим критические точки II рода:

$$y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} = 0, \text{ откуда } x = 0;\ x = -\sqrt{3};\ x = \sqrt{3}.$$

Из схемы (рис. 56) следует, что в точках $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$; функция имеет перегибы; на интервалах $]-\sqrt{3}; 0[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$ функция вогнута, а на интервалах $]0; \sqrt{3}[\cup]-\infty; -\sqrt{3}[$ выпукла. Ординаты точек перегиба:

при $x = 0$ $y_{пер} = 0$; при $x = -\sqrt{3}$ $y_{пер} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; при $x = \sqrt{3}$ $y_{пер} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

График функции представлен на рис. 57

7. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

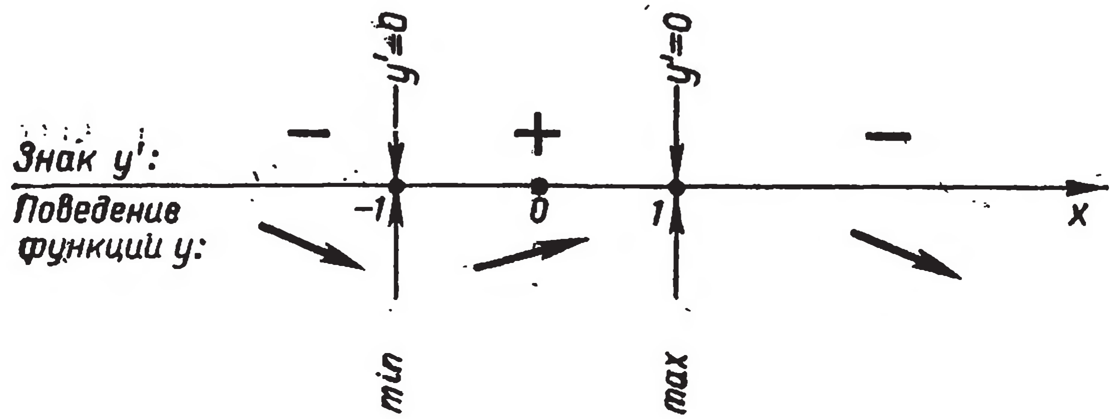

Рис. 55

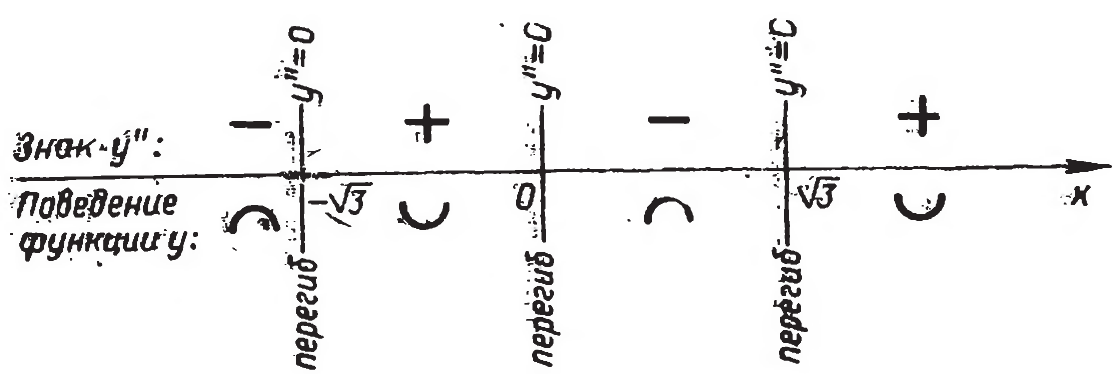

Рис. 56

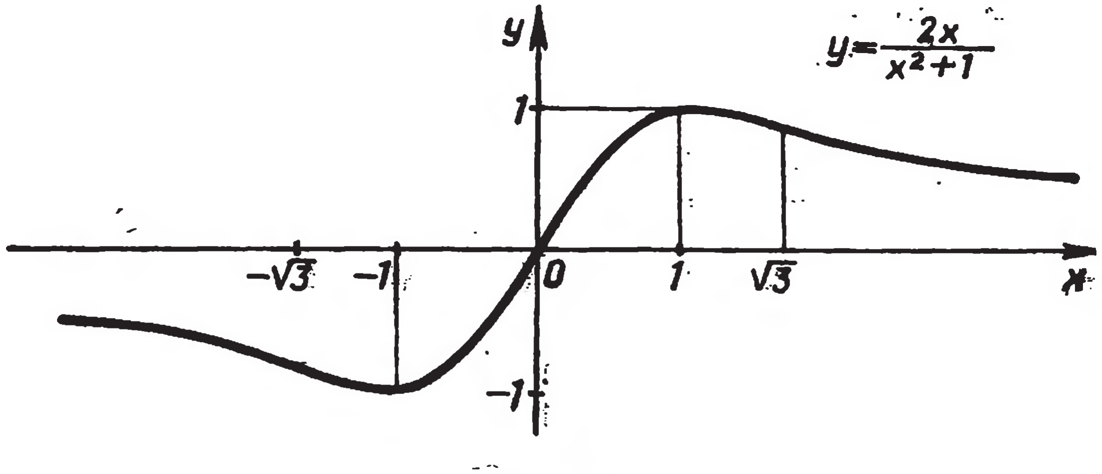

Рис. 57

I. Область определения — вся числовая ось, кроме точек $= 2$ и $x = -2$, в которых функция терпит разрывы.

Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-4}=0;\qquad \lim_{x\to-2-0}\frac{x}{x^2-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x}{x^2-4}=+\infty;\qquad \lim_{x\to2-0}\frac{x}{x^2-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to2+0}\frac{x}{x^2-4}=+\infty;\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=0.$$

Отсюда следует, что имеются две вертикальные асимптоты $x = 2$ и $x = -2$ и горизонтальная $y = 0$.

II. Функция непериодическая, нечетная.

III. Функция имеет один нуль в точке $x = 0$.

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенство:

$$y' > 0, \text{ или } \frac{x}{x^2-4} > 0, \text{ откуда } -2 < x < 0 \text{ и } x > 2.$$

Функция положительна на интервалах $]-2; 0[\,\cup\,]2; +\infty[$ и отрицательна (в силу нечетности) на интервалах $]-\infty; -2[\,\cup\,]0; 2[$.

IV. Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(x^2-4)}=0;\ b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=0.$$

Наклонных асимптот нет, есть горизонтальная асимптота $y=0$.

V. Найдем производную функции: $y'=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$.

Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точек $x = 2$ и $x = -2$, где она не существует (в этих точках и сама функция не существует). Функция монотонно убывает всюду, где она определена.

VI. Находим вторую производную: $y''=\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $\dfrac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} > 0$, откуда $-2 < x < 0$; $x > 2$;

б) $y'' < 0$, или $\dfrac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} < 0$, откуда $x < -2$; $0 < x < 2$.

Приравнивая к нулю вторую производную, находим критическую точку II рода: $x = 0$.

Из схемы (рис. 58) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб (это следует также и из нечетности функции); на интервалах $]-2; 0[\,\cup\,]2; +\infty[$ функция вогнута, а на интервалах $]\infty; -2[\,\cup\,]0; 2[$ выпукла. Ордината точки перегиба: при $x = 0$ $y = 0$.

График функции представлен на рис. 59.

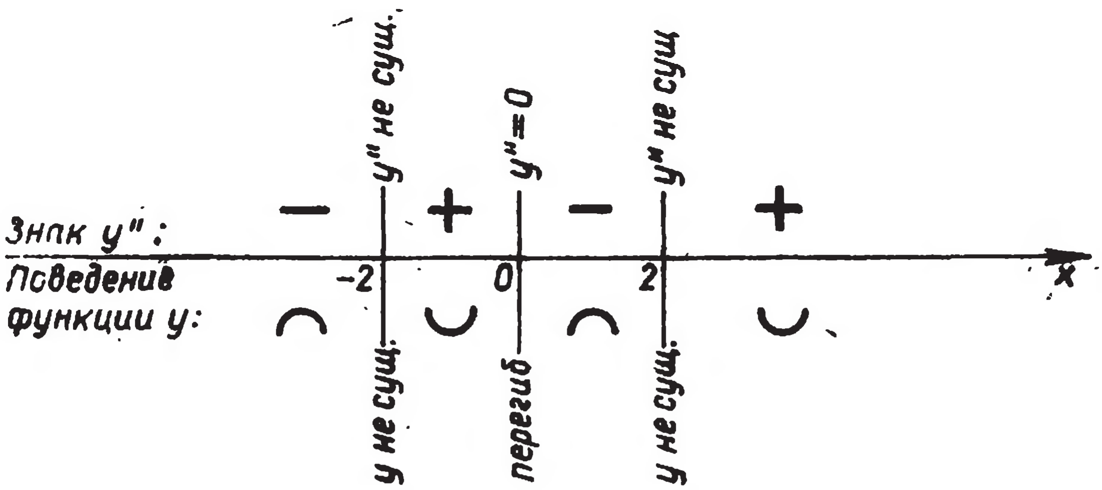

Рис. 58

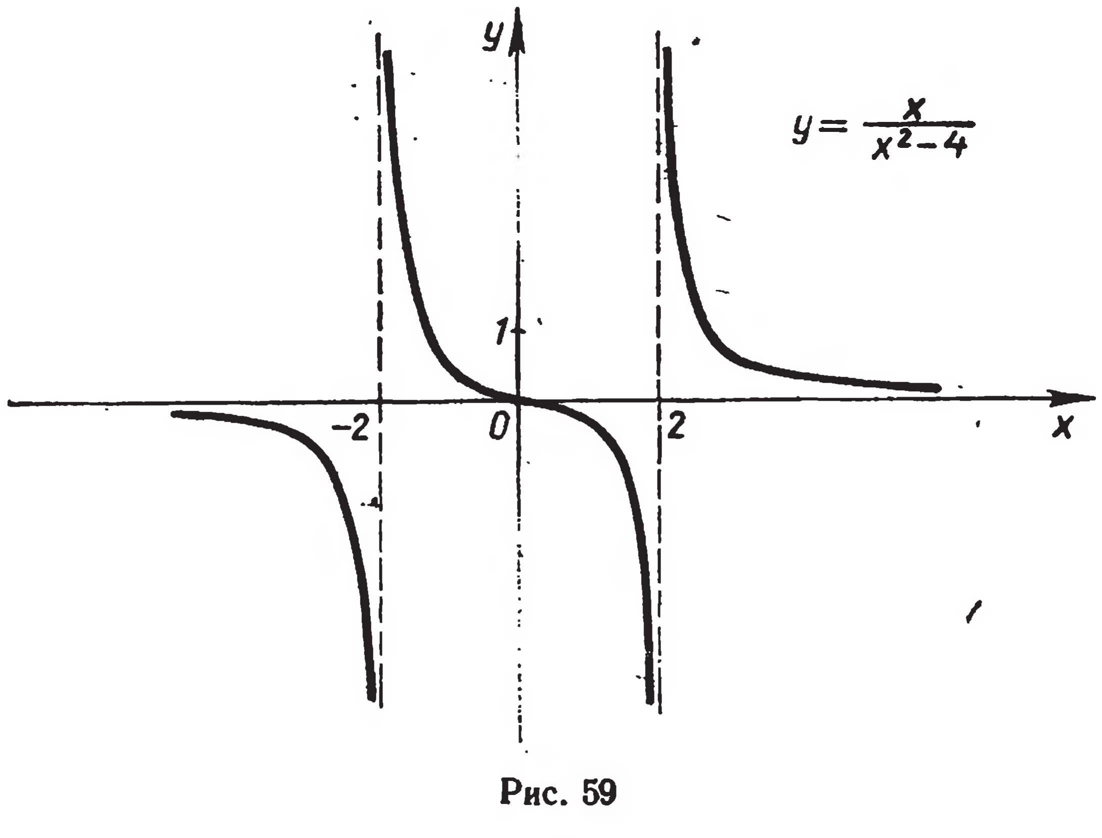

Рис. 59

8. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

I. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -1$, в которой функция терпит разрыв. Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty.$$

Отсюда следует, что имеется вертикальная асимптота $x = -1$.

II. Функция непериодическая, общего вида.

III. Функция имеет один нуль в точке $x = 0$. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

IV. Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = -1.$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

V. Найдем производную функции: $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $\dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} > 0$, откуда $x < -3$; $-1 < x < 0$; $x > 0$;

б) $y' < 0$, или $\dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} < 0$, откуда $-3 < x < -1$.

Приравнивая к нулю производную, находим критические точки I рода: $x = 0$, $x = -3$.

Из схемы (рис. 60) следует, что в точке $x = -3$ функция имеет максимум, в точке $x = 0$ экстремума нет. На интервалах $[-\infty; -3[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ функция монотонно возрастает, на интервале $]-3; -1[$ монотонно убывает.

Ордината точки максимума: $y_{\max} = -3\dfrac{3}{8}$.

VI. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$.

Вторая производная положительна на интервале $]0; +\infty[$ и отрицательна на интервалах $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$. Критическая точка II рода: $x = 0$.

Из схемы (рис. 61) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб; на интервалах $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ функция выпукла, на интервале $]0; +\infty[$ вогнута. Ордината точки перегиба: $y_{\text{пер}} = 0$.

График функции представлен на рис. 62.

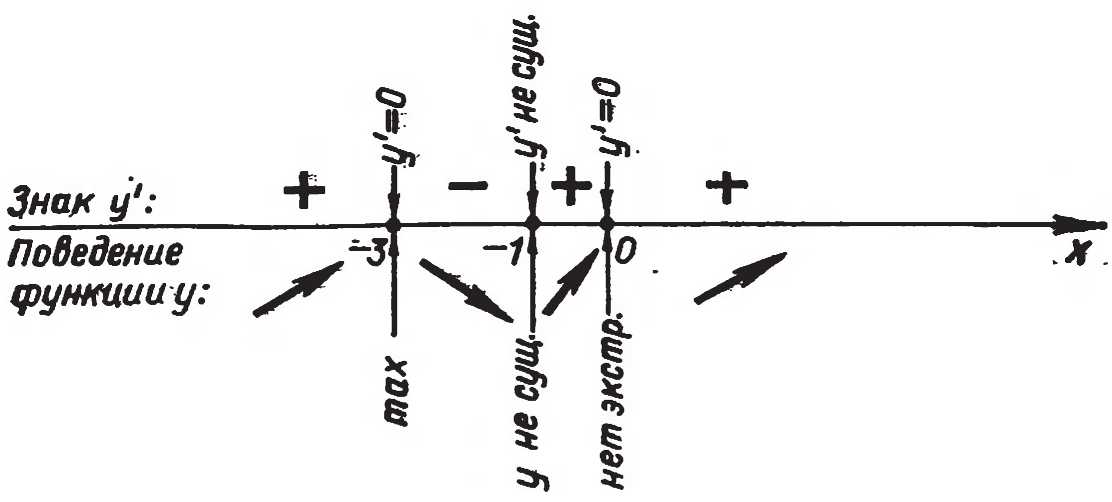

Рис. 60

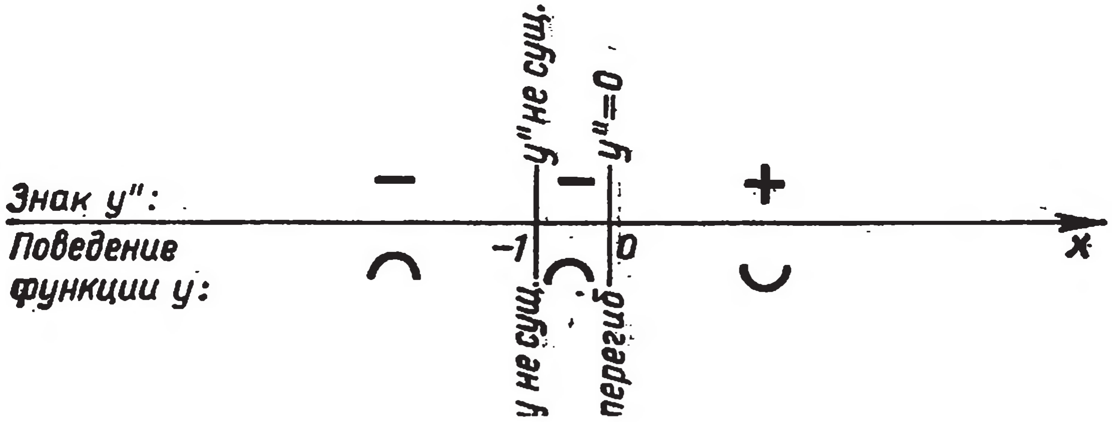

Рис. 61

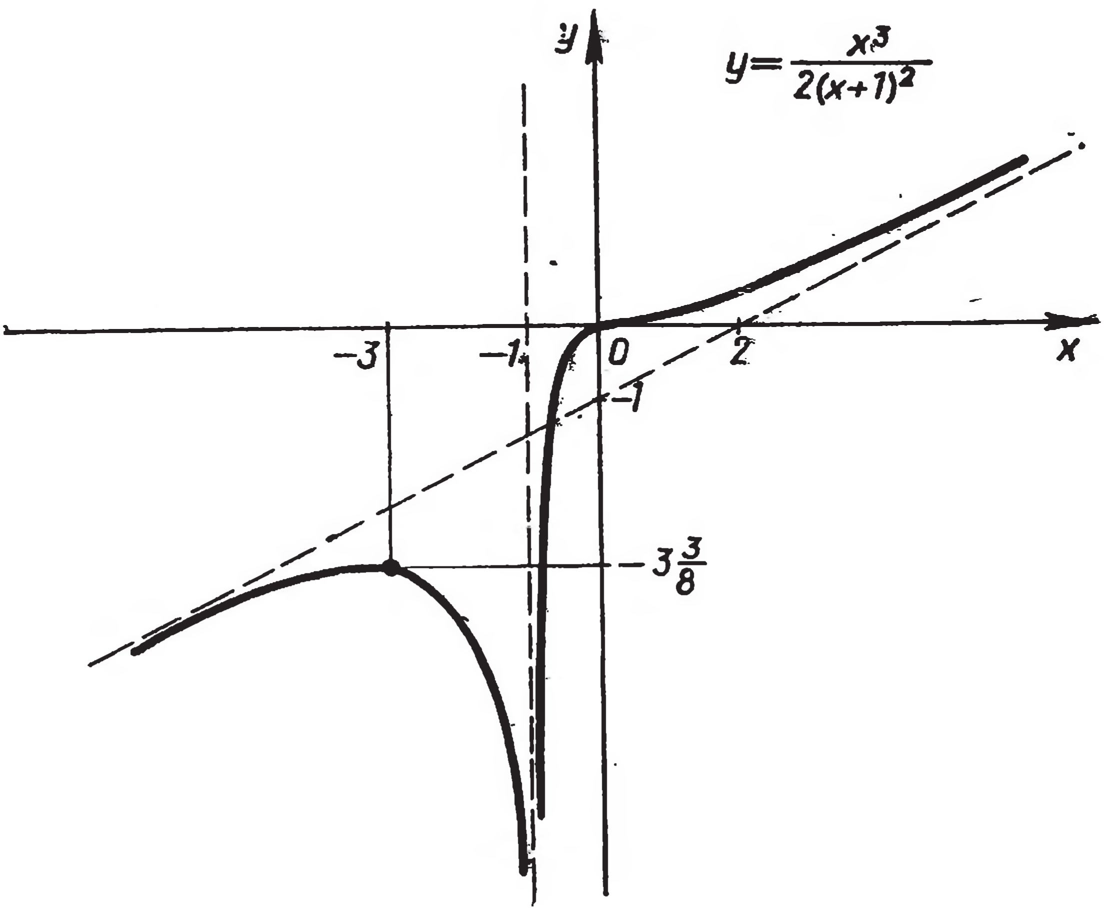

Рис. 62

9. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

I. Область определения — отрезок $[0;\ 4]$. Граничные значения функции: при $x = 0$ $y = 2$; при $x = 4$ $y = 2$. Точек разрыва нет.

II. Функция непериодическая, общего вида.

III. Функция нулей не имеет, положительна на всем отрезке $[0;\ 4]$.

IV. Наклонных асимптот нет, так как область определения — конечный отрезок.

V. Найдем производную функции $y' = \dfrac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}}$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}} > 0$, откуда $0 < x < 2$;

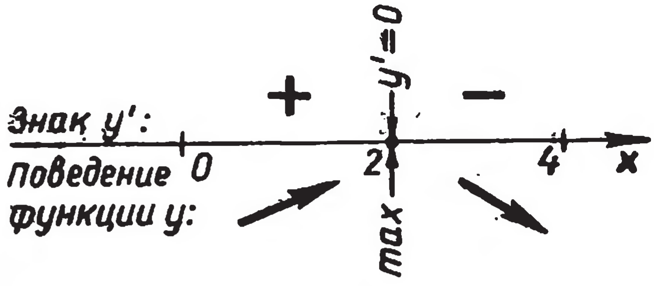

Рис. 63

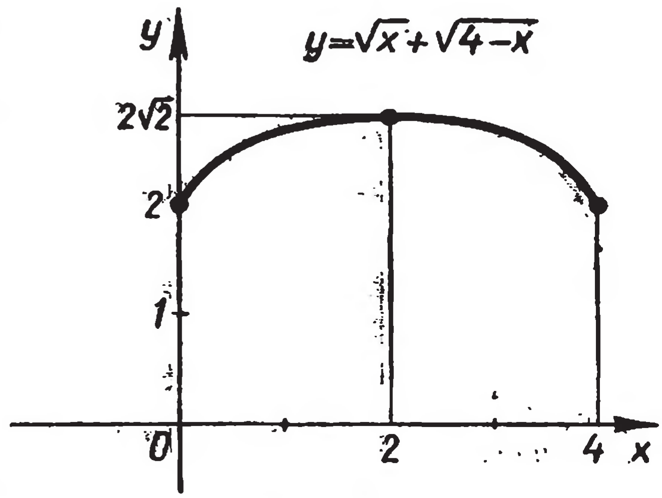

Рис. 64

б) $y' < 0$, или $\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}} < 0$, откуда $2 < x < 4$.

Приравнивая к нулю производную, находим критическую точку I рода: $y' = \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}}$, откуда $x = 2$.

Из схемы (рис. 63) следует, что в точке $x = 2$ функция имеет максимум. Кроме того, на интервале $]0;\ 2[$ функция монотонно возрастает, а на интервале $]2;\ 4[$ монотонно убывает. Ордината точки максимума: $y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

VI Находим вторую производную функции: $y'' = -\dfrac{1}{4} \times$

$$\times \frac{(4-x)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\cdot(4-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

На интервале $]0;\ 4[$ вторая производная отрицательна, функция выпукла.

График функции представлен на рис. 64. Отметим, что первая производная стремится к $+\infty$, когда x приближается справа к 0 или слева к 4. Геометрически это означает, что график функции касается в точке $x = 0$, $y = 2$ оси ординат, а в точке $x = 4$, $y = 2$ вертикальной прямой $x = 4$.

10. $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет.

Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt[3]{x^2}) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{x^2}) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty.$$

II. Функция непериодическая, общего вида.

III. Нули функции в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Функция положительна при $x > 1$ и отрицательна на интервалах $]-\infty; 0[\,\cup\,]0; 1[$.

IV. Параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x} = 1; \quad b = \lim_{x\to\infty}(x-\sqrt[3]{x^2}-x) = -\infty.$$

Наклонных асимптот нет.

V. Найдем производную функции: $y' = 1-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $1-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$, откуда $x < 0$; $x > \dfrac{8}{27}$;

б) $y' < 0$, или $1-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} < 0$, откуда $0 < x < \dfrac{8}{27}$.

Приравнивая к нулю производную, находим критическую точку II рода:

$$y' = 1-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \text{ откуда } x = \frac{8}{27}.$$

Кроме того, критической точкой I рода будет служить точка $x = 0$, в которой не существует производная.

Из схемы (рис. 65) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет максимум, в точке $x = \dfrac{8}{27}$ — минимум; на интервалах $\left]-\infty; 0\right[\,\cup\,\left]\dfrac{8}{27}; +\infty\right[$ функция монотонно возрастает, на интервале $\left]0; \dfrac{8}{27}\right[$ монотонно убывает. Ординаты экстремальных точек:

при $x = 0$ $y_{max} = 0$; при $x = \dfrac{8}{27}$ $y_{min} = -\dfrac{4}{27}$.

VI. Находим вторую производную функции: $y'' = \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$.

Вторая производная всюду положительна, кроме точки $x = 0$, где она не существует. Поэтому функция вогнута на интервалах $]-\infty; 0[\,\cup\,]0; +\infty[$.

График функции представлен на рис. 66.

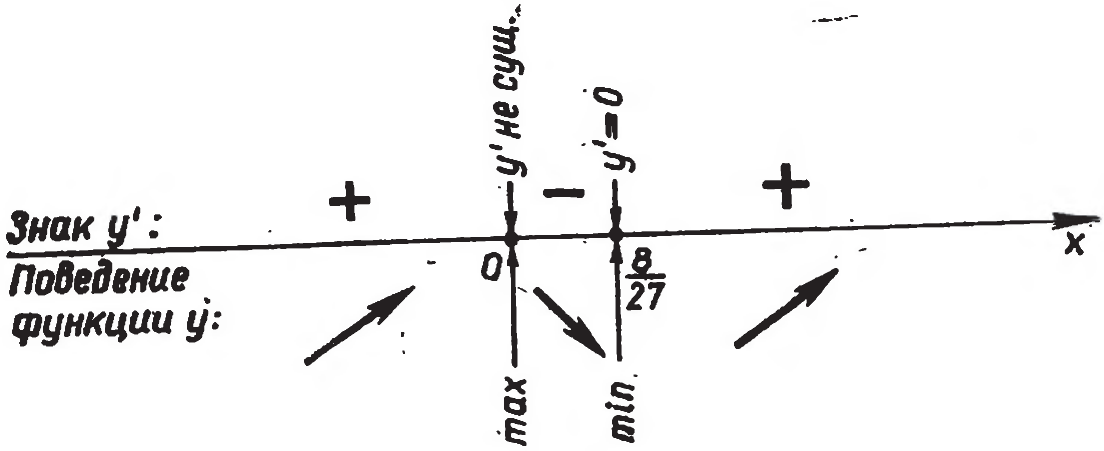
y' не сущ.
y' = 0
+
−
+
Знак y':
Поведение функции y:
0
8/27
x
max
min

Рис. 65

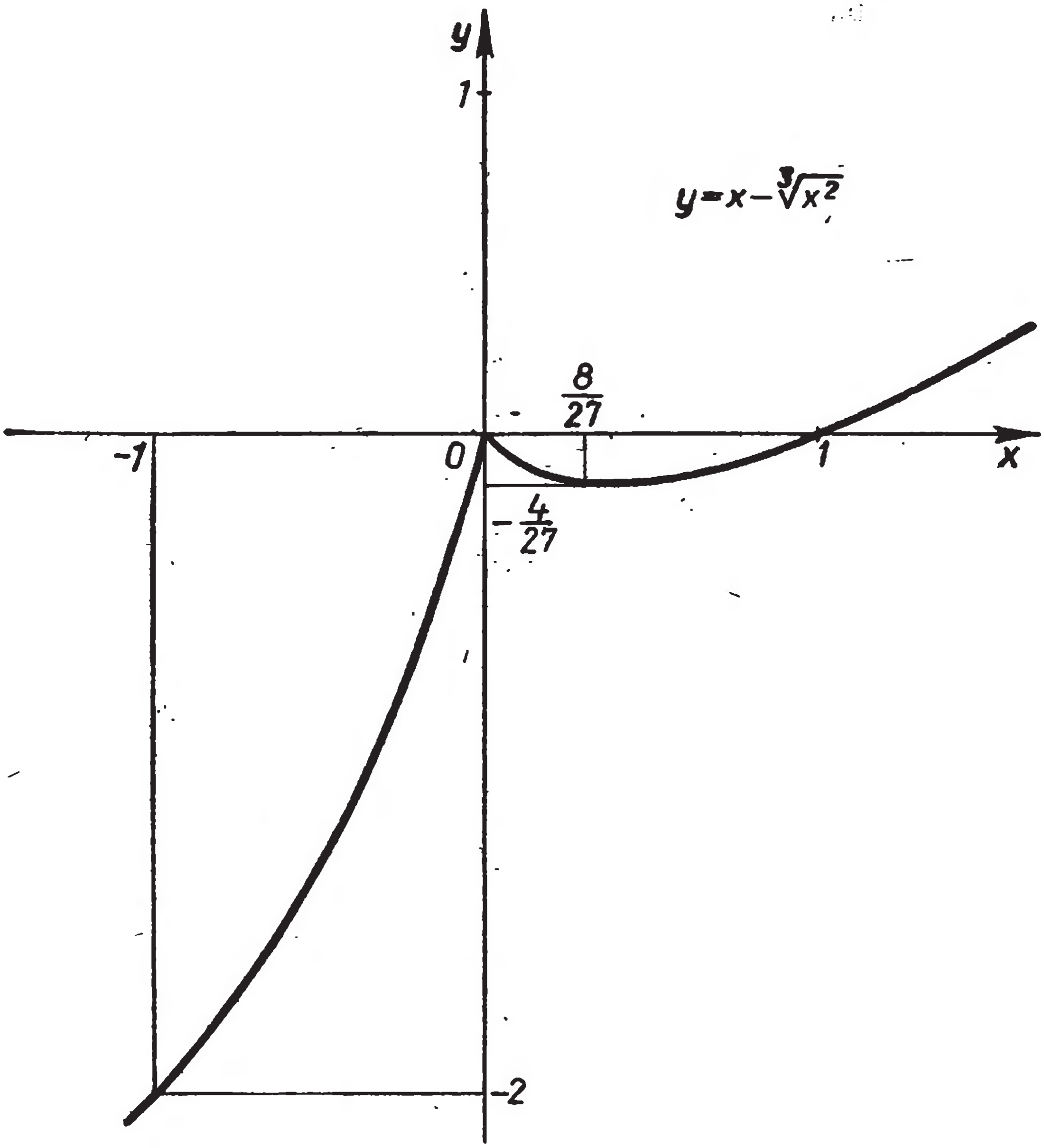
y
1
$y = x - \sqrt[3]{x^2}$
8/27
−1
0
1
x
−4/27
−2

Рис. 66

11. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$.

I. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет.

Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = +\infty.$$

II. Функция непериодическая, общего вида.

III. Нули функции в точках $x = 2$; $x = 1$.

Функция положительна на интервалах $]-\infty; 1[\ \cup\ ]2; +\infty[$ и отрицательна на интервале $]1; 2[$.

IV. Параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}{x} = 0; \quad b = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.

V. Найдем производную функции: $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}}$

Решаем неравенства:

а) $y' > 0$, или $\frac{1}{3} \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}} > 0$, откуда $x > \frac{3}{2}$, $x \neq 2$;

б) $y' < 0$, или $\frac{1}{3} \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}} < 0$, откуда $x < \frac{3}{2}$, $x \neq 1$.

Приравнивая к нулю производную, найдем критическую точку II рода: $x = \frac{3}{2}$.

Кроме того, имеются еще две критические точки I рода: $x = 1$ и $x = 2$. В этих точках производная не существует.

Из схемы (рис. 67) следует, что функция монотонно убывает на интервалах $\left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; \frac{3}{2}\right[$ и монотонно возрастает на интервалах $\left]\frac{3}{2}; 2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$. Таким образом, в точке $x = \frac{3}{2}$ имеется минимум. Ордината точки минимума: $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. В точках $x = 1$, $x = 2$ экстремумов нет.

VI. Находим вторую производную: $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^{\frac{5}{3}}}$.

Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $-\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^{\frac{5}{3}}} > 0$, откуда $1 < x < 2$;

б) $y'' < 0$, или $-\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^{\frac{5}{3}}} < 0$, откуда $x < 1$; $x > 2$.

Вторая производная в нуль нигде не обращается, однако в точках $x = 1$ и $x = 2$ она не существует. Эти точки являются критическими точками II рода. Из схемы (рис. 68) следует, что на интервалах $]-\infty; 1[\cup]2; \infty[$ функция выпукла, а на интервале $]1; 2[$ вогнута. В точках $x = 1$ и $x = 2$ функция имеет перегибы. Ординаты точек перегиба:
при $x = 1$ $y_{\text{пер}} = 0$; при $x = 2$ $y_{\text{пер}} = 0$.
График функции представлен на рис. 69.

12. $y = e^{\frac{1}{x-1}}$.

I. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = 1$, в которой функция терпит разрыв. Граничные значения функции:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1; \quad \lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0; \quad \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

Отсюда следует, что $x = 1$ есть вертикальная асимптота.

II. Функция общего вида, непериодическая.

III. Нулей функция не имеет, положительна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$.

IV. Параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = 0; \quad b = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

Имеется горизонтальная асимптота $y = 1$.

V. Найдем производную функции: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$.

Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Следовательно, функция монотонно убывает всюду, где она определена.

VI. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2x-1}{(x-4)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$.

Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $\frac{2x-1}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, откуда $x > \frac{1}{2}$; $x \neq 1$;

б) $y'' < 0$, или $\frac{2x-1}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-1}} < 0$, откуда $x < \frac{1}{2}$.

Приравнивая к нулю вторую производную, найдем критическую точку II рода: $x = \frac{1}{2}$.

Из схемы (рис. 70) следует, что на интервалах $\left]\frac{1}{2}; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$

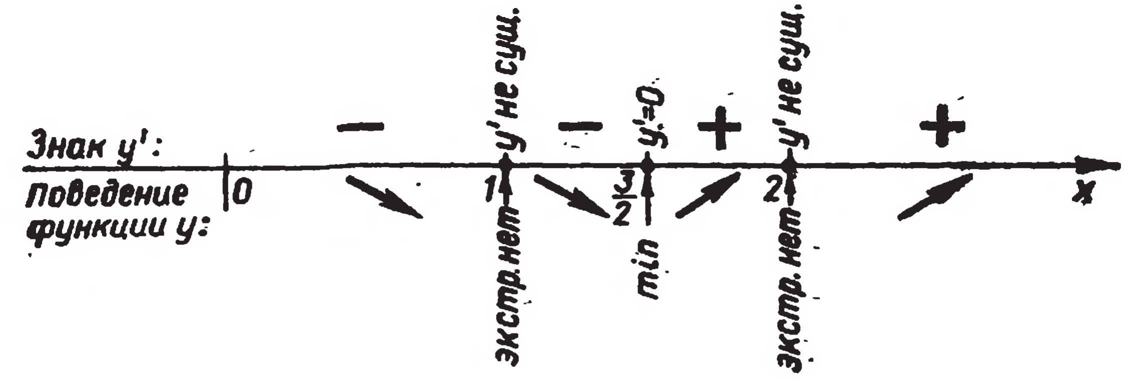

Рис. 67

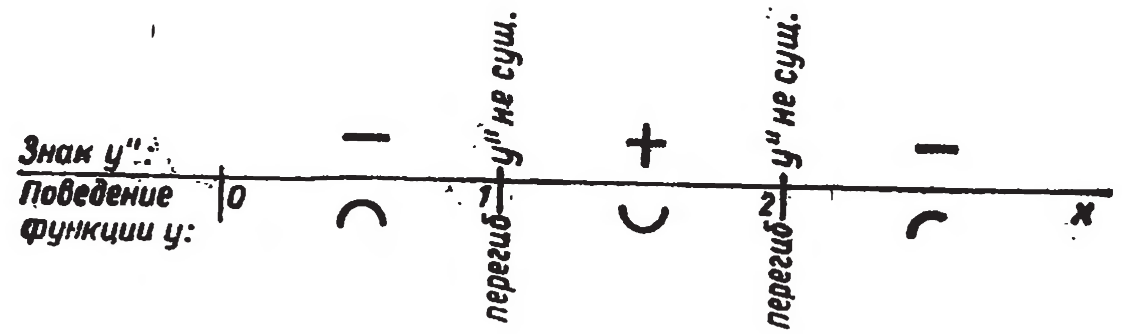

Рис. 68

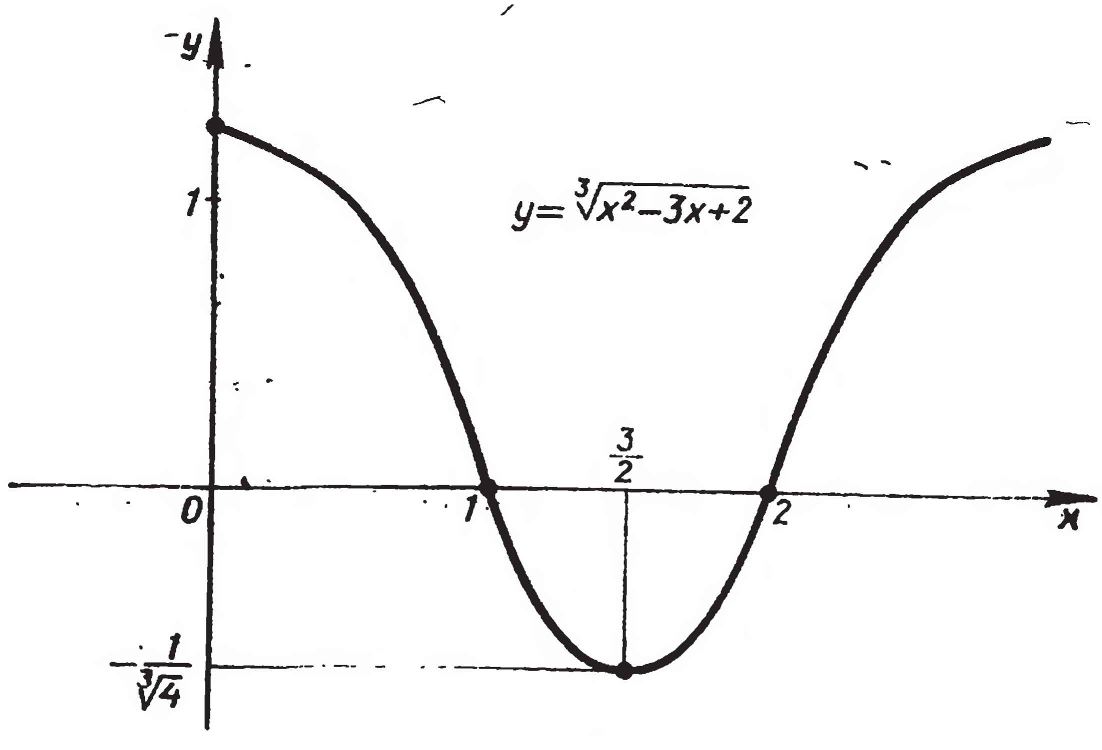

Рис. 69

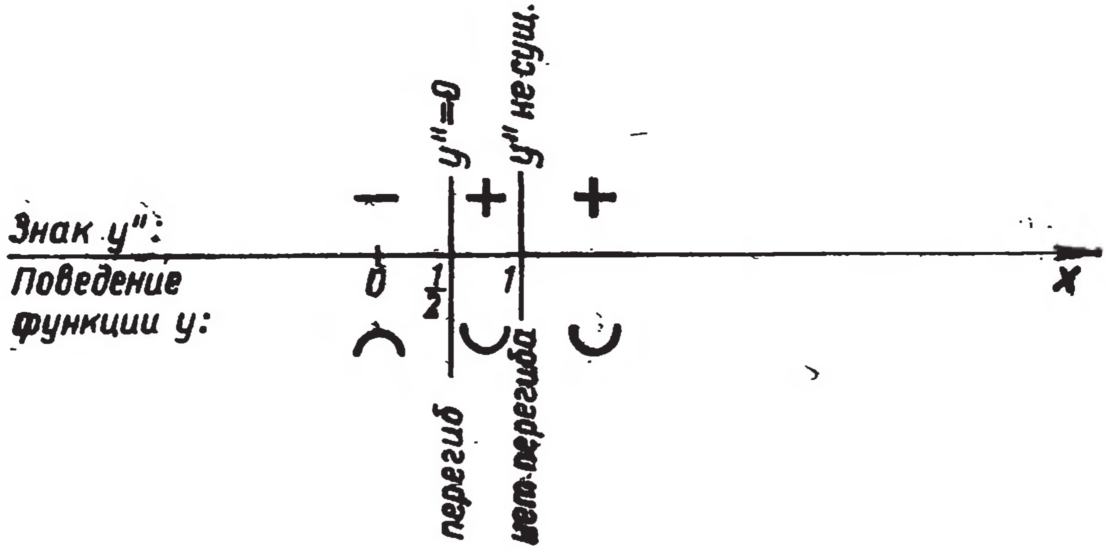

Рис. 70

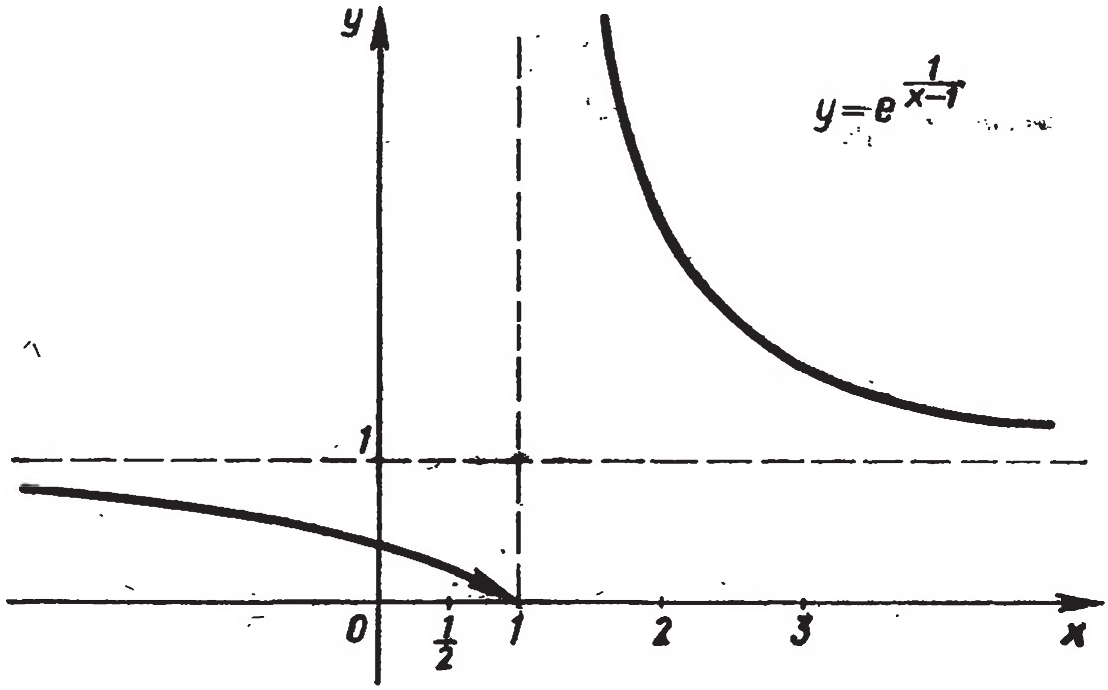

Рис. 71

функция вогнута, на интервале $\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[$ выпукла. Таким образом, в точке $x = \frac{1}{2}$ функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба: $y_{\text{пер}} = e^{-2} \approx 0{,}14$.

График функции представлен на рис. 71.

Глава III

§ 9. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФИКАМИ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы рассмотрим графики функций вида $y = f[\varphi(x)]$, где $\varphi(x)$ — любая из основных элементарных функций, а f — любая из следующих операций над ними: прибавление к функции какого-либо числа, умножение функции на число, деление единицы на функцию, возведение функции в положительную степень, извлечение корня из функции, нахождение показательной функции от функции, логарифмирование функции, нахождение модуля функции, нахождение тригонометрических функций от функций.

Все указанные операции можно проводить непосредственно над графиками основных элементарных функций (понимая под этим выполнение операций над соответствующими координатами), поскольку эти графики известны. Как правило, график функции $y = f[\varphi(x)]$ трудно, а порой и просто невозможно построить, используя общую схему исследования функции (гл. II). В то же время эскиз такого графика легко нарисовать с помощью упрощенной схемы исследования, если использовать операции над графиками.

Схема построения графика указанной сложной функции следующая:

1) строим график функции $y_1 = \varphi(x)$;

2) отмечаем на этом графике характерные точки, т. е. нули и точки разрыва, находим граничные точки или соответствующие пределы и одну-две промежуточные точки;

3) производим заданные операции над ординатами выбранных точек, вычисляем соответствующие пределы и отмечаем полученные точки и предельные значения на рисунке, начерченном под графиком функции $y_1 = \varphi(x)$ так, чтобы ось y_1 была продолжением оси y;

4) соединяем полученные точки сплошной (в силу непрерывности элементарных функций всюду, где они определены) линией и учитываем (если она есть) симметрию графика относительно точки или прямой.

На самом деле полученные точки можно соединять не сплошной, а даже плавной линией, так как рассматриваемые в этой главе элементарные функции недифференцируемы лишь в отдельных, как правило, хорошо известных точках. Так, например, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ не имеет производной в точках $x = 1$ и $x = -1$, и, следовательно, в этих точках указанные функции недифференцируемы.

На практике, скажем, для вычисления площади фигуры, ограниченной некоторой замкнутой кривой, или объема тела вращения и т. п. вполне достаточно построить эскиз графика. Впрочем, при необходимости такой эскиз всегда можно уточнить с помощью методов, рассмотренных в предыдущей главе.

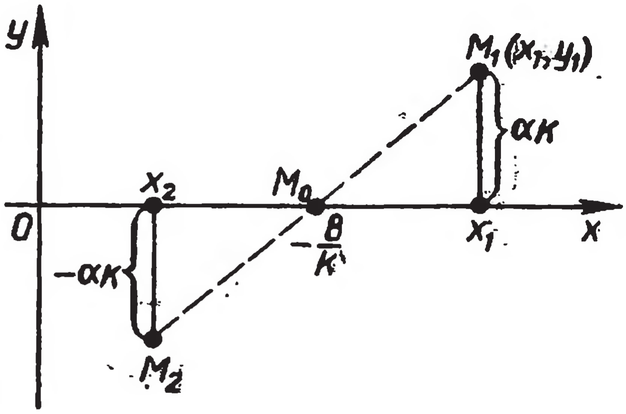

Рис. 72

Проиллюстрируем приведенную выше схему построения эскизов графиков сложных функций на примерах.

§ 10. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $y = f(kx+b)$

Как известно, график функции $y_1 = kx + b$ есть прямая линия.

Замечание. График функции $y_1 = kx + b$ $(k \neq 0)$ (рис. 72) симметричен относительно точки $M_0\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$. Действительно, пусть $x_1 = -\frac{b}{k} + \alpha$, $x_2 = -\frac{b}{k} - \alpha$, где α — любое положительное число.

Тогда

$$y_1(x_1) = kx_1 + b = k\left(-\frac{b}{k} + \alpha\right) + b = \alpha k;$$

$$y_2(x_2) = kx_2 + b = k\left(-\frac{b}{k} - \alpha\right) + b = -\alpha k.$$

Итак, $y_1(x_1) = -y_2(x_2)$. Таким образом, точка M_1 симметрична точке M^2 относительно точки $M_0\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$.

1. $y = \left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3$ (рис. 73).

I. Область определения — вся действительная ось.

Граничные значения:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3 = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty}\left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3 = -\infty.$$

II. Здесь $y_1 = 2 - \frac{1}{3}x$, $y = y_1^3$.

Строим график функции $y_1 = 2 - \frac{1}{3}x$.

Отмечаем на этом графике характерные точки — точки пересечения с осями координат и одну промежуточную точку. Возводим в куб ординаты этих точек:

а) M_1 (6; 0): $y_1 = 0$, отсюда $y = y_1^3 = 0$, получаем точку N_1 (6; 0);

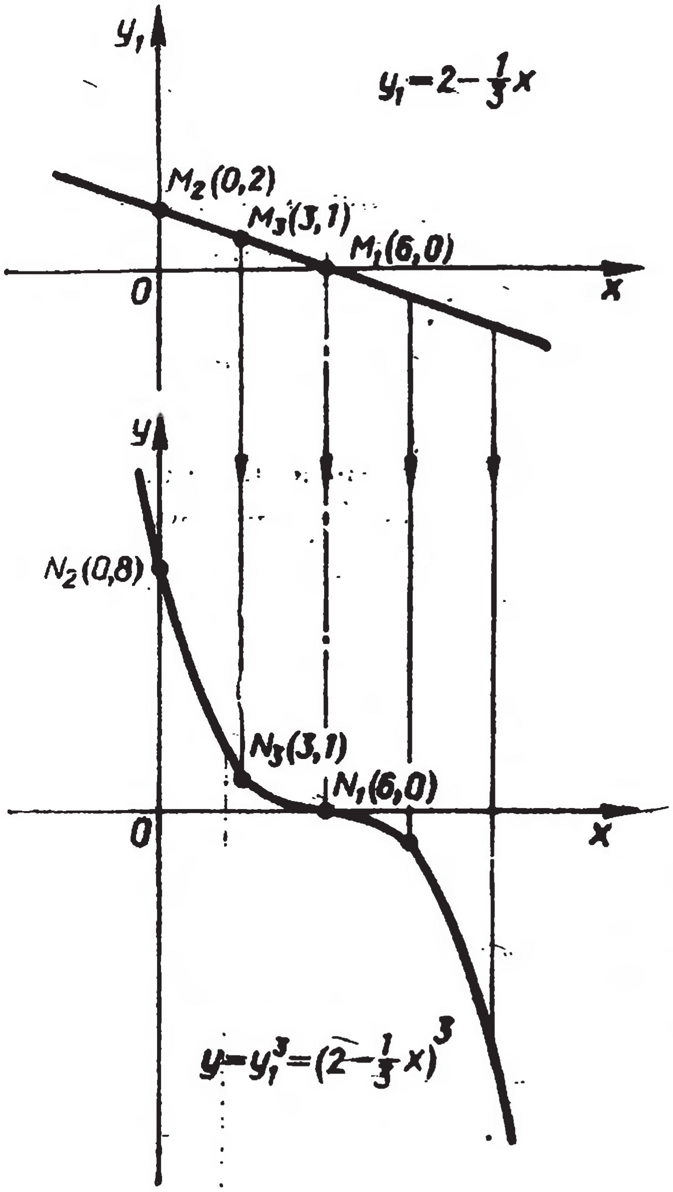

Рис. 73

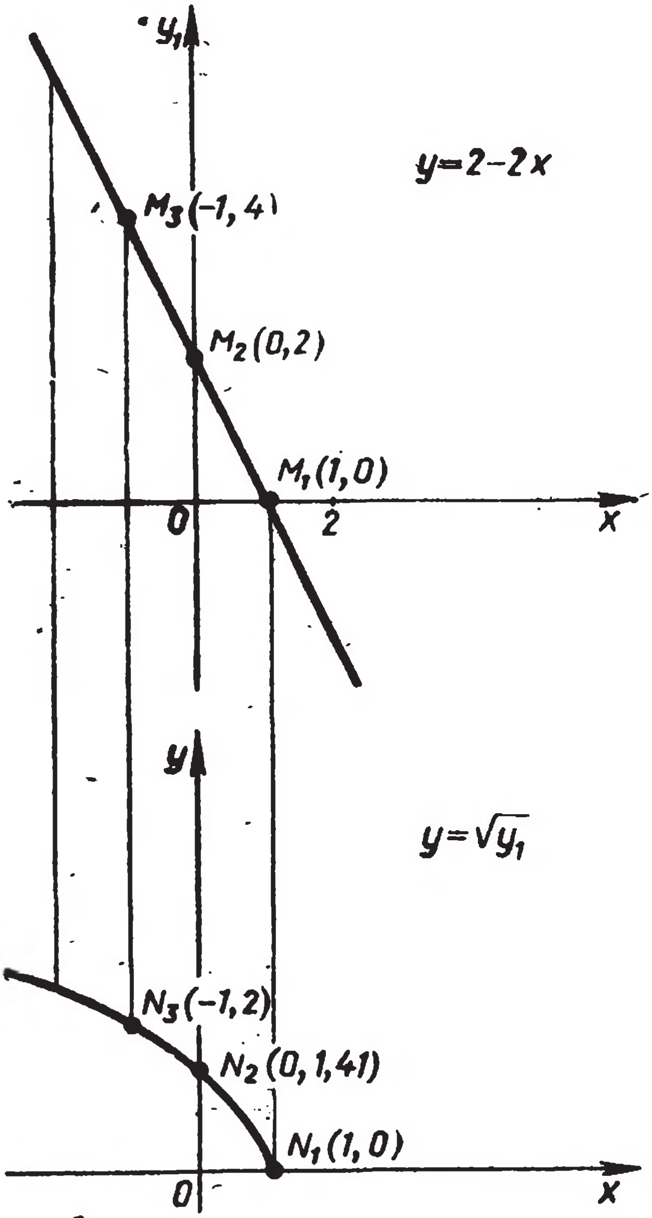

Рис. 74

б) M_2 (0; 2): $y_1 = 2$, отсюда $y = y_1^3 = 8$, получаем точку N_2 (0; 8);
в) M_3 (3; 1): $y_1 = 1$, отсюда $y = y_1^3 = 1$, получаем точку N_3 (3; 1).

Наносим полученные точки на нижний рисунок, соединяем их плавной линией и учитываем симметрию графика относительно точки N_1 (6, 0).

Действительно, функция $y_1 = 2 - \frac{1}{3}x$ симметрична относительно точки M_1 (6, 0), поэтому функция $y = y_1^3$ симметрична относительно точки N_1 (6, 0).

2. $y = \sqrt{2 - 2x}$ (рис. 74).

I. Решаем неравенство $2 - 2x \geqslant 0$, откуда $-\infty < x \leqslant 1$. Этот полуинтервал является областью определения нашей функции. Граничные значения:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2 - 2x} = +\infty; \text{ при } x = 1 \ y = 0.$$

II. Здесь $y_1 = 2 - 2x$, $y = \sqrt{y_1}$.

Отмечаем на графике функции $y_1 = 2 - 2x$ характерные точки пересечения с осями координат и одну промежуточную точку: M_1 (1; 0), M_2 (0; 2), M_3 (—1; 4).

Производим извлечение квадратного корня из ординат этих точек:

а) M_1 (1; 0): $y_1 = 0$, отсюда $y = \sqrt{y_1} = 0$, получаем точку $N_1(1; 0)$;
б) M_2 (0; 2): $y_1 = 2$, отсюда $y = \sqrt{y_1} = \sqrt{2}$, получаем точку N_2 (0; $\sqrt{2}$);
в) M_3 (—1; 4): $y_1 = 4$, отсюда $y = \sqrt{y_1} = 2$, получаем точку N_3 (—1; 2).

Наносим полученные точки на нижний рисунок и соединяем их плавной линией, учитывая, что при $x \to -\infty$ $y \to +\infty$.

3. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ (рис. 75).

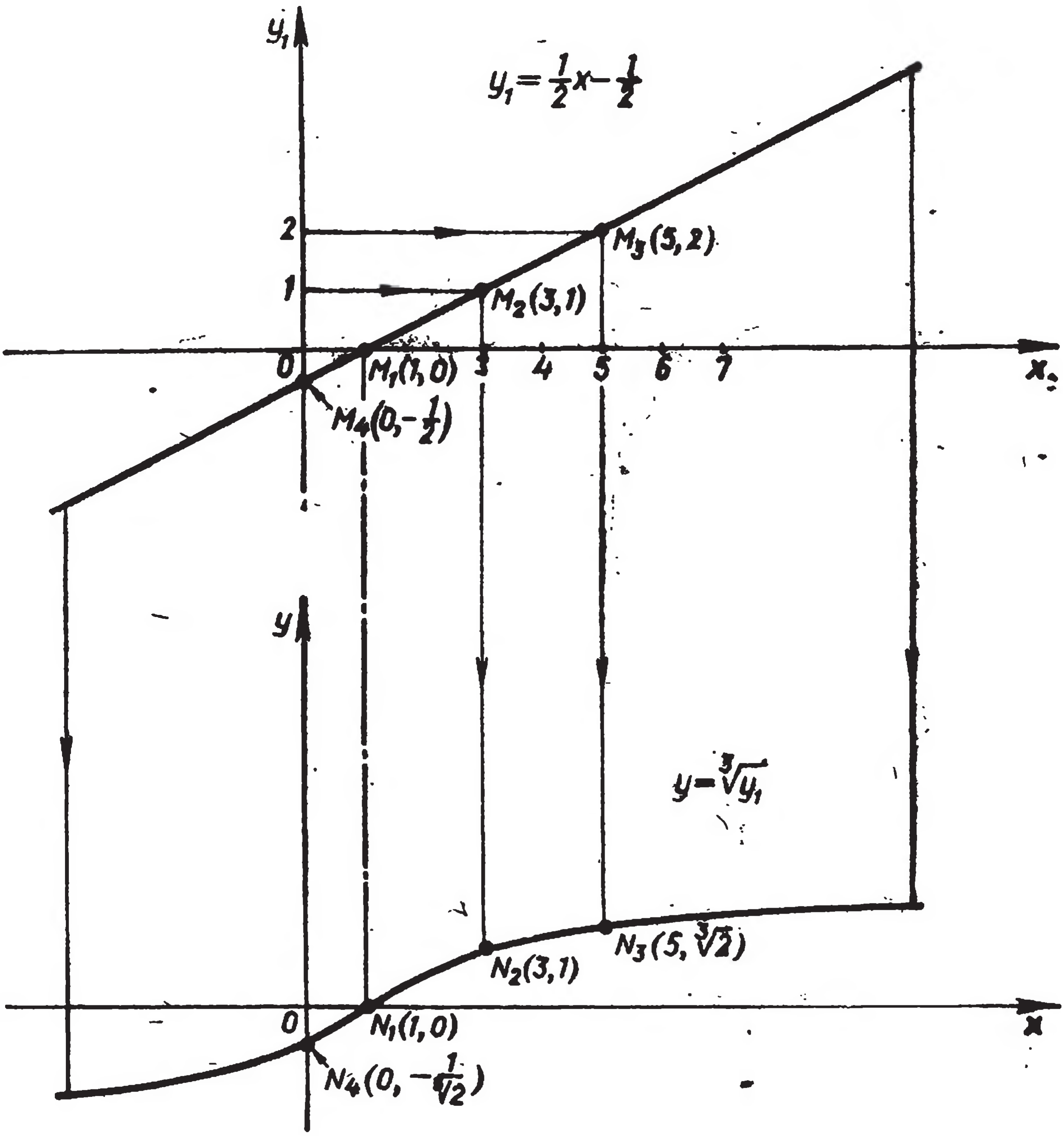

Рис. 75

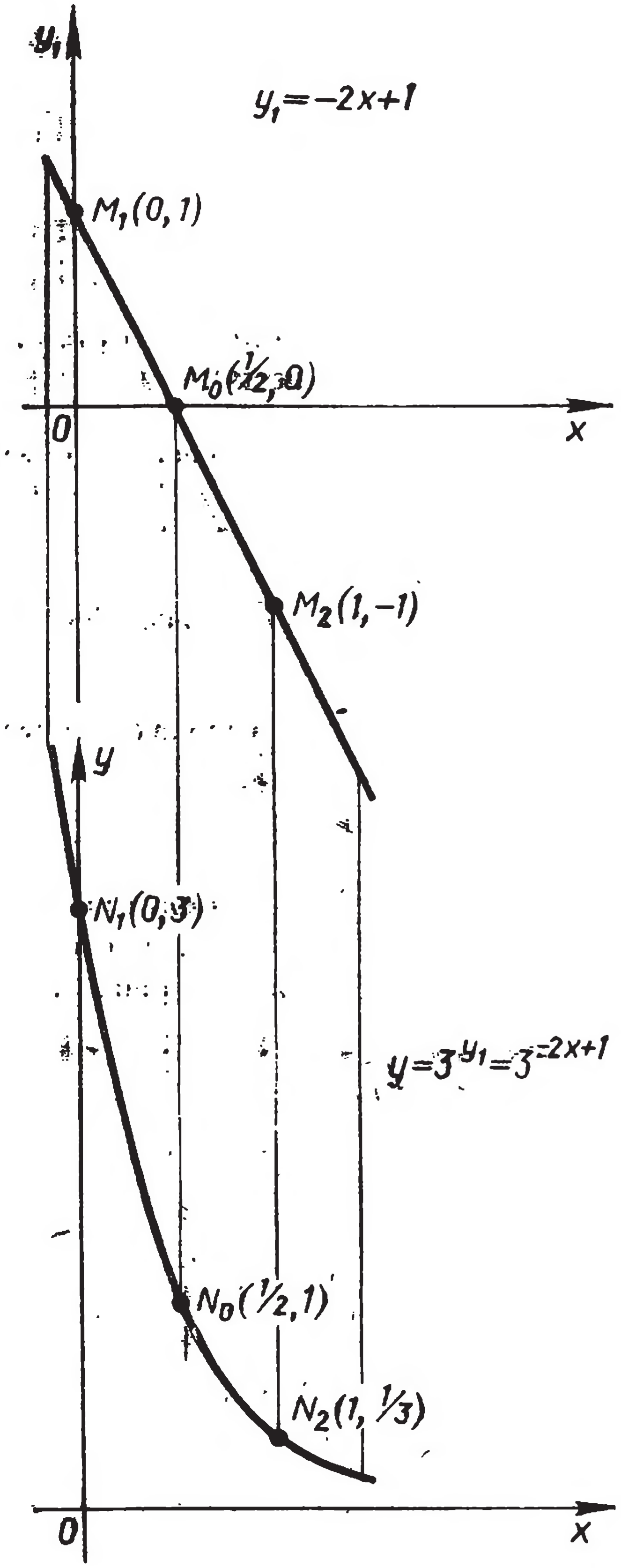

Рис. 76

I. Область определения — вся действительная ось.

Граничные значения:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}=+\infty.$$

II. Здесь $y_1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; $y=\sqrt[3]{y_1}$.

Отмечаем на графике функции $y_1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ характерные точки: $M_1(1;\ 0)$, $M_2(3;\ 1)$, $M_3\ (5;\ 2)$, $M_4\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Извлекаем корень кубический из ординат этих точек.

а) $M_1(1;\ 0)$: $y_1=0$, отсюда $y=\sqrt[3]{y_1}=0$, получаем точку $N_1(1;\ 0)$;

б) $M_2(3;\ 1)$: $y_1=1$, отсюда $y=\sqrt[3]{y_1}=1$, получаем точку $N_2(3;\ 1)$;

в) $M_3(5;\ 2)$: $y_1=2$, отсюда $y=\sqrt[3]{y_1}=\sqrt[3]{2}$, получаем точку $N_3(5;\ \sqrt[3]{2})$;

г) $M_4\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$: $y_1=-\frac{1}{2}$, отсюда $y=\sqrt[3]{y_1}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, получаем точку $N_4\left(0;\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Наносим полученные точки на нижний рисунок, соединяем их плавной линией и учитываем симметрию графика относительно точки N_1 (1, 0).

4. $y=3^{-2x+1}$ (рис. 76).

I. Область определения — R.

Граничные значения:

$$\lim_{x\to-\infty}3^{-2x+1}=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}3^{-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}3^{\frac{1}{2x-1}}=0.$$

Ось x, таким образом, является горизонтальной асимптотой для правой части графика.

II. Здесь $y_1 = -2x + 1$, $y = 3^{y_1}$.

Отмечаем на графике функции $y_1 = -2x + 1$ характерные точки:

$$M_0\left(\frac{1}{2};\ 0\right),\quad M_1(0;\ 1),\quad M_2(1;\ -1).$$

Возводим основание 3 в степень с показателем, равным ординате указанной точки:

а) $M_0\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$: $y_1 = 0$, отсюда $y = 3^{y_1} = 1$, получаем точку $N_0\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$;

б) $M_1(0;\ 1)$: $y_1 = 1$, отсюда $y = 3^{y_1} = 3$, получаем точку $N_1(0;\ 3)$;

в) $M_2(1;\ -1)$: $y_1 = -1$, отсюда $y = 3^{y_1} = \frac{1}{3}$, получаем точку $N_2\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$.

Наносим полученные точки на нижний рисунок, соединяем их плавной линией, учитывая, что при $x \to -\infty$ $y \to +\infty$ и что ось x является горизонтальной асимптотой для правой части графика.

5. $y = \lg(2 - 3x)$ (рис. 77).

I. Решаем неравенство $2 - 3x > 0$, откуда $x < \frac{2}{3}$.

Этот интервал — область определения нашей функции.

Граничные значения:

$$\lim_{x \to -\infty} \lg(2 - 3x) = +\infty;\quad \lim_{x \to \frac{2}{3} - 0} \lg(2 - 3x) = -\infty.$$

Таким образом, $x = \frac{2}{3}$ есть вертикальная асимптота.

II. Здесь $y_1 = 2 - 3x$, $y = \lg y_1$.

Отмечаем на графике функции $y = 2 - 3x$ характерные точки:

$M_1\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$, $M_2(0;\ 2)$, $M_3\left(-\frac{8}{3};\ 10\right)$.

а) $M_1\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$: $y_1 = 1$, отсюда $y = \lg y_1 = 0$, получаем точку $N_1\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$;

б) $M_2(0;\ 2)$: $y_1 = 2$, отсюда $y = \lg y_1 = \lg 2$, получаем точку $N_2(0;\ \lg 2)$;

в) $M_3\left(-\frac{8}{3};\ 10\right)$: $y_1 = 10$, отсюда $y = \lg y_1 = 1$, получаем точку

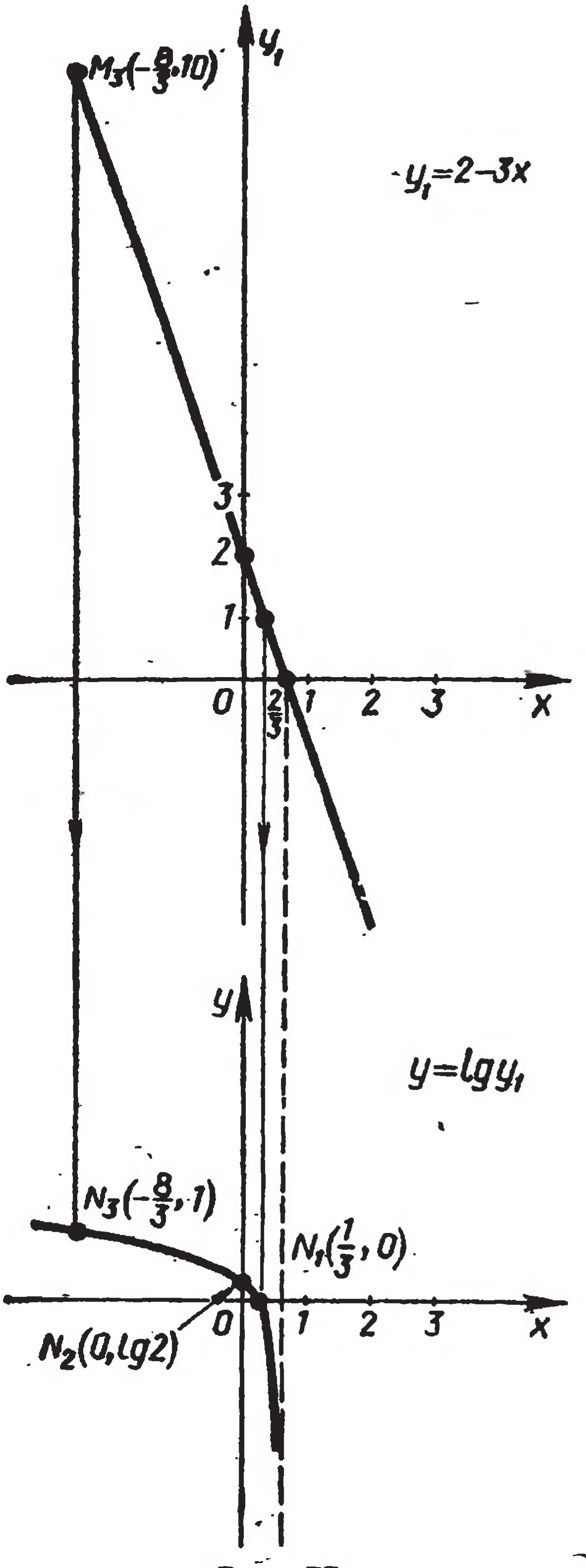

Рис. 77

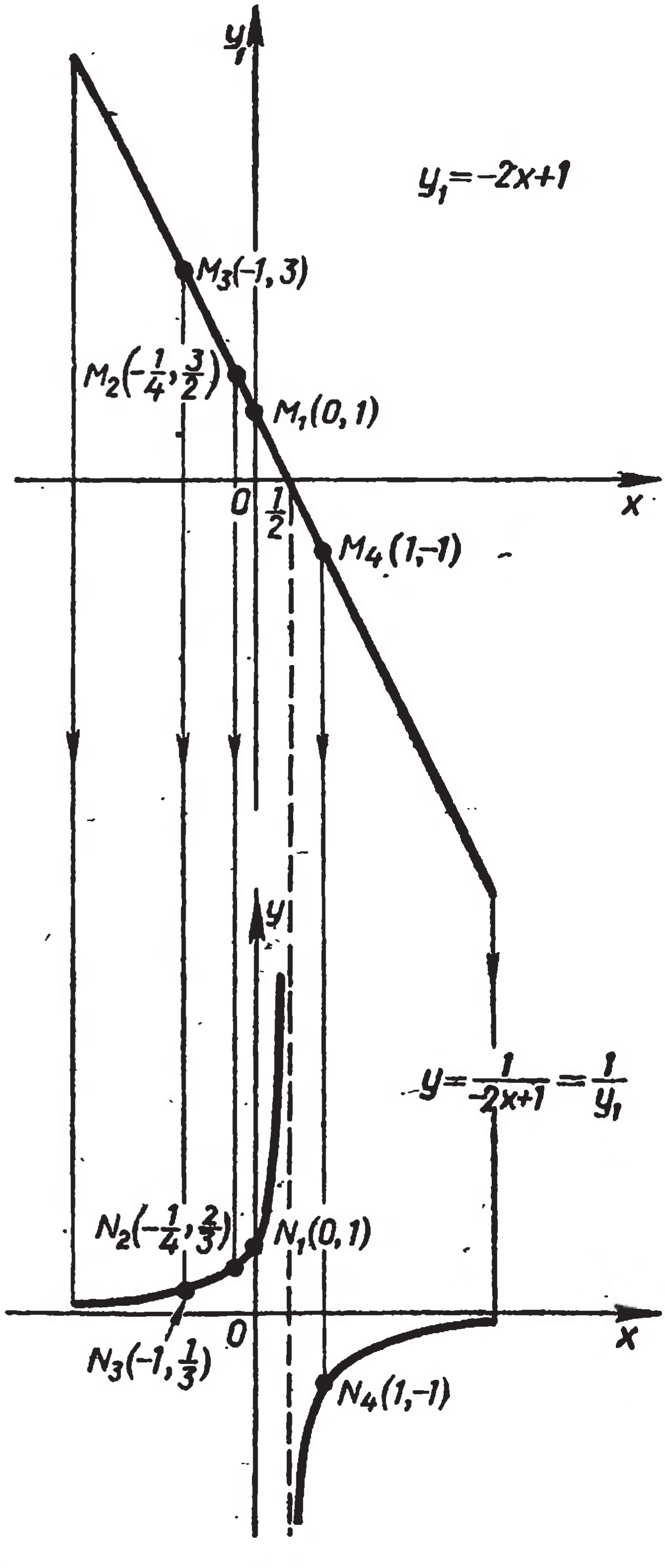

Рис. 78

$N_3\left(-\frac{8}{3};\ 1\right)$.

Наносим полученные точки на нижний рисунок, соединяем их плавной линией, учитывая, что при $x \to -\infty$ $y \to +\infty$ и что прямая $x = \frac{2}{3}$ является вертикальной асимптотой.

6. $y = \dfrac{1}{-2x+1}$ (рис. 78).

I. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = \frac{1}{2}$.

Граничные значения:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x+1}=0;\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{1}{-2x+1}=+\infty;\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{1}{-2x+1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-2x+1}=0.$$

Таким образом, имеется горизонтальная асимптота $y=0$ и вертикальная асимптота $x=\frac{1}{2}$.

II. Здесь $y_1=-2x+1$, $y=\frac{1}{y_1}$.

Отмечаем на графике функции $y_1=-2x+1$ характерные точки:

$$M_1(0;\ 1),\ M_2\left(-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right),\ M_3(-1;\ 3),\ M_4(1;\ -1).$$

а) $M_1(0;\ 1)$: $y_1=1$, отсюда $y=\frac{1}{y_1}=1$, получаем точку $N_1(0;\ 1)$;

б) $M_2\left(-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right)$: $y_1=\frac{3}{2}$, отсюда $y=\frac{1}{y_1}=\frac{2}{3}$, получаем точку $N_2\left(-\frac{1}{4};\ \frac{2}{3}\right)$;

в) $M_3(-1;\ 3)$: $y_1=3$, отсюда $y=\frac{1}{y_1}=\frac{1}{3}$, получаем точку $N_3\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$.

Наносим полученные точки на нижний рисунок, соединяем их плавной линией; учитываем при этом, что $y=0$ — горизонтальная асимптота, $x=\frac{1}{2}$ — вертикальная асимптота и что график симметричен относительно точки $x=\frac{1}{2}$.

7. $y=\left|\frac{4}{3}-2x\right|$ (рис. 79).

I. Область определения — вся числовая ось.

II. Здесь $y_1=\frac{4}{3}-2x$, $y=|y_1|$.

Строим график функции $y_1=\frac{4}{3}-2x$.

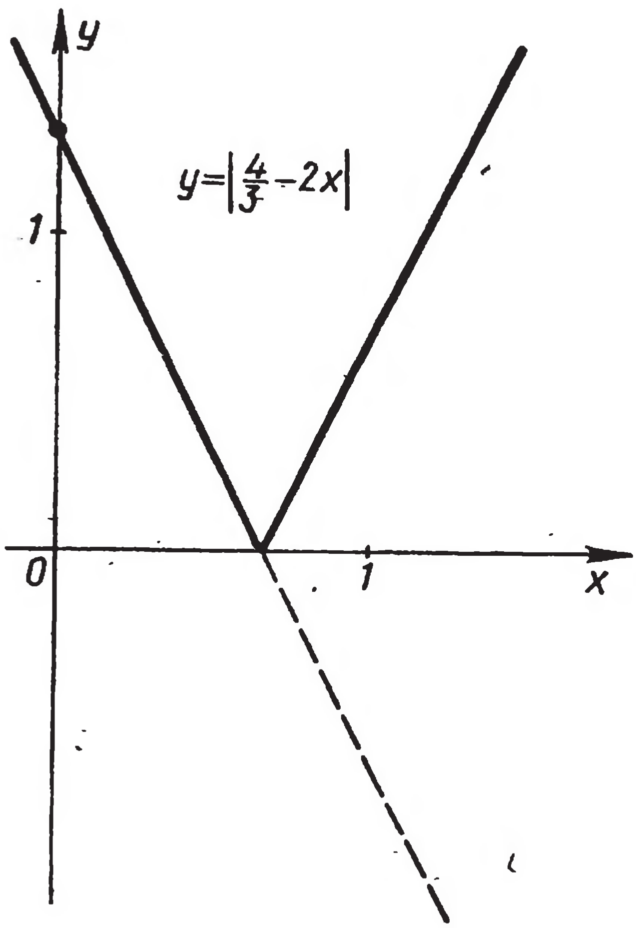

Рис. 79

Рассмотрим какую-нибудь точку графика $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$ с положительной ординатой. Так как абсолютная величина (модуль) положительной ординаты точки графика $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$ есть она сама, то эта ордината, а также все ординаты левой части графика $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$ просто совпадают с соответствующими ординатами графика $y = \left|\frac{4}{3} - 2x\right|$.

Рассмотрим теперь какую-нибудь точку графика $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$ с отрицательной ординатой. Поскольку модуль отрицательной ординаты точки графика $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$ есть число положительное, равное значению отрицательной ординаты, взятому со знаком «минус», то эта ордината должна откладываться на графике вверх (в положительном направлении оси y). Таким образом, правую часть графика, для которой $y_1 < 0$, получаем отражением относительно оси x.

8. $y = \sin(2x + 3)$ (рис. 80).

I. Область определения — вся числовая ось.

II. Здесь $y_1 = 2x + 3$, $y = \sin y_1$.

Отметим, что функция $y = \sin y_1$ периодична с периодом 2π. Поэтому рассматриваем отрезок оси: $0 \leqslant y_1 \leqslant 2\pi$. На этом отрезке выбираем 5 характерных точек: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{\pi}{2}$, $y_3 = \pi$, $y_4 = \frac{3}{2}\pi$, $y_5 = 2\pi$.

На графике функции $y_1 = 2x + 3$ находим точки с соответствующими ординатами. Таким образом, получаем следующие характерные точки графика $y_1 = 2x + 3$:

$$M_1\left(-\frac{3}{2};\ 0\right),\ M_2\left(\frac{-3+\frac{\pi}{2}}{2};\ \frac{\pi}{2}\right),\ M_3\left(\frac{-3+\pi}{2};\ \pi\right),$$

$$M_4\left(\frac{-3+\frac{3}{2}\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right),\ M_5\left(\frac{-3+2\pi}{2};\ 2\pi\right).$$

а) $M_1\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$: $y_1 = 0$, отсюда $y = \sin y_1 = 0$, получаем точку $N_1\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$;

б) $M_2\left(\frac{-3+\frac{\pi}{2}}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$: $y_1 = \frac{\pi}{2}$, отсюда $y = \sin y_1 = 1$, получаем точку $N_2\left(\frac{-3+\frac{\pi}{2}}{2};\ 1\right)$;

в) $M_3\left(\frac{-3+\pi}{2};\ \pi\right)$: $y_1=\pi$, отсюда $y=\sin y_1=0$, получаем точку $N_3\left(\frac{-3+\pi}{2};0\right)$;

г) $M_4\left(\frac{-3+\frac{3}{2}\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right)$: $y_1=\frac{3\pi}{2}$, отсюда $y=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, получаем точку $N_4=\left(\frac{-3+\frac{3\pi}{2}}{2};-1,\right)$;

д) $M_5\left(\frac{-3+2\pi}{2};\ 2\pi\right)$: $y_1=2\pi$, отсюда $y=\sin 2\pi=0$, получаем точку $N_5\left(\frac{-3+2\pi}{2};0\right)$.

Полученные точки наносим на нижний рисунок и соединяем плавной линией. Оставшуюся часть графика можно достроить, пользуясь периодичностью функции $y=\sin(2x+3)$ с периодом π.

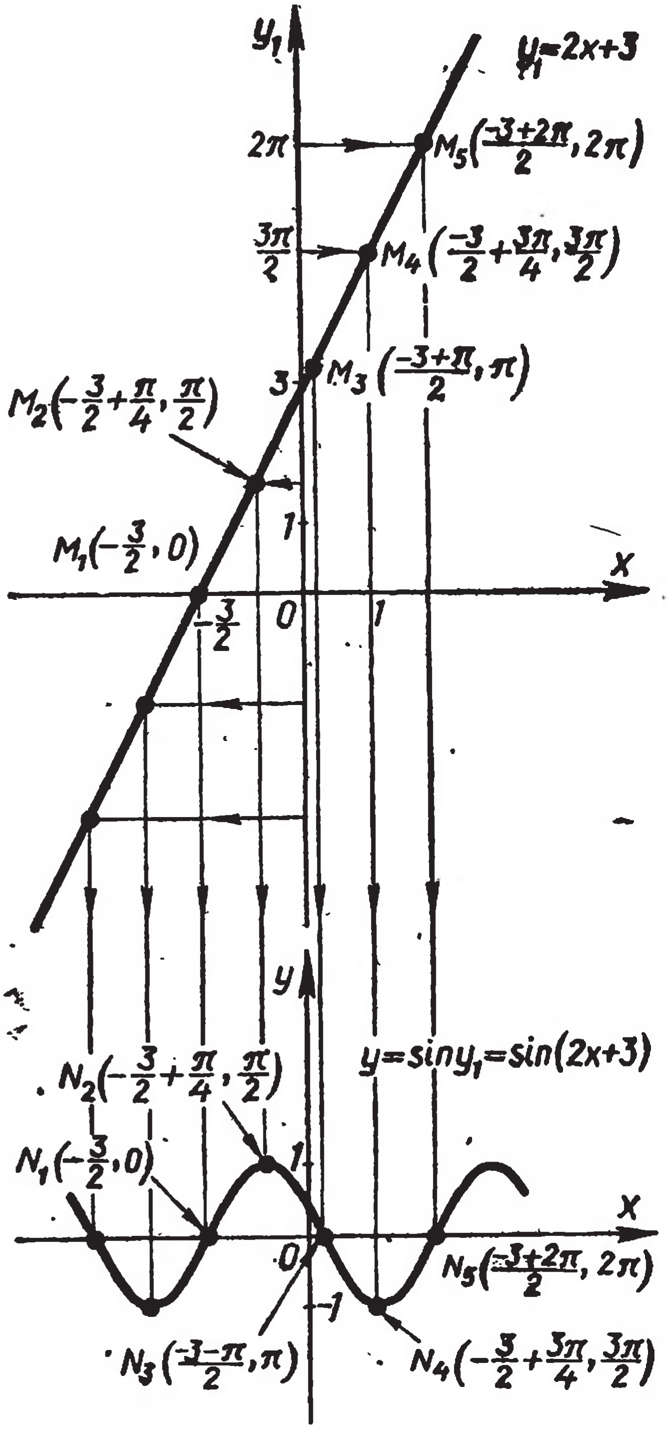

Рис. 80

§ 11. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС, ДЕФОРМАЦИЯ И ОТРАЖЕНИЕ

Простейшие операции над графиками такие, как параллельный перенос, деформация (растяжение и сжатие) и отражение удобно производить не по указанной выше схеме, а по следующим простым правилам.

1. $y=f(x)+b$ (параллельный перенос вдоль оси ординат). Сначала строим график функции $y=f(x)$ и затем переносим его параллельно самому себе вверх ($b>0$) или вниз ($b<0$) на $|b|$ единиц. Проще, однако, опустить ($b>0$) или соответственно поднять ($b<0$) ось x на $|b|$ единиц.

2. $y=f(x-a)$ (параллельный перенос вдоль оси абсцисс).

Строим график функции $y=f(x)$ и переносим его параллельно самому себе вправо ($a>0$) или влево ($a<0$) на $|a|$ единиц. Вместо этого можно перенести ось y влево ($a>0$) или соответственно вправо ($a<0$) на $|a|$ единиц.

3. $y=-f(x)$ (отражение относительно оси абсцисс). Строим график функции $y=f(x)$ и зеркально отражаем его относительно оси x.

4. $y=f(-x)$ (отражение относительно оси ординат). Строим график функции $y=f(x)$ и зеркально отражаем его относительно оси ординат.

5. $y = Af(x)$, $(A > 0)$ (деформация графика вдоль оси ординат).

Строим график функции $y = f(x)$ и увеличиваем его ординаты в A раз при $A > 1$ (растяжение графика) или уменьшаем его ординаты в $\frac{1}{A}$ раз при $0 < A < 1$ (сжатие графика).

6. $y = f(\lambda x)$, $(\lambda > 0)$ (деформация графика вдоль оси абсцисс).

§ 12. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $y=f(ax^2+bx+c)$

Как известно, графиком функции $y_1 = ax^2 + bx + c$ служит парабола, симметричная относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$.

1. $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

I. Область определения — вся числовая ось.

Граничные значения: $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - 4x + 3)^2 = +\infty$.

II. $y_1 = x^2 - 4x + 3$, $y = y_1^2$.

Строим график функции $y_1 = x^2 - 4x + 3$. Отмечаем на этом графике характерные точки — вершину параболы, точки пересечения параболы с осями координат и одну промежуточную точку:

$$M_0\,(2; -1),\ M_1\,(3; 0),\ M_2\,(4; 3,)\ M_3\,(1; 0),\ M_4\,(0; 3).$$

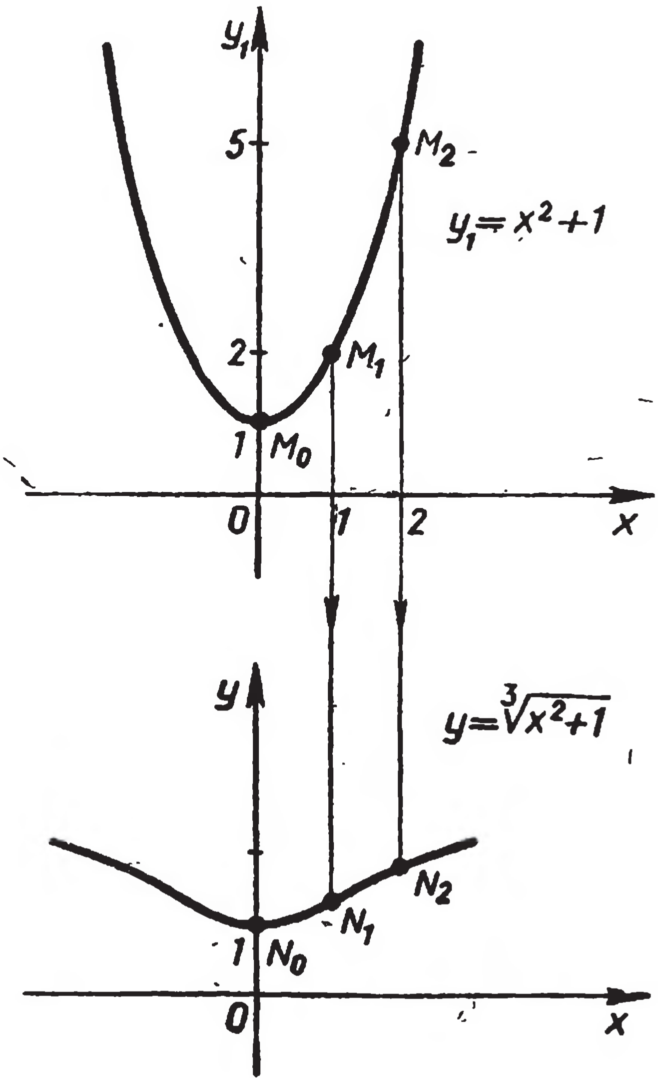

Рис. 81

В силу симметрии графика относительно прямой $x = 2$ для построения эскиза достаточно трех точек: M_0, M_1, M_2.

Возводим в квадрат ординаты этих точек:

а) $M_0\,(2; -1)$: $y_1 = -1$, отсюда $y = y_1^2 = 1$, получаем точку $N_0\,(2; 1)$;

б) $M_1\,(3; 0)$: $y_1 = 0$, отсюда $y = 0$, получаем точку $N_1\,(3; 0)$;

в) $M_2\,(4; 3)$: $y_1 = 3$, отсюда $y = 9$, получаем точку $N_2\,(4; 9)$.

Наносим полученные точки на нижний рисунок, соединяем их плавной линией и учитываем граничные значения и симметрию относительно прямой $x = 2$.

2. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ (рис. 81).

I. Область определения — вся числовая ось.

Граничные значения: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^3 + 1} = +\infty$.

Функция четная, т. е. график ее симметричен относительно оси ординат.

II. $y_1 = x^2 + 1$, $y = \sqrt[3]{y_1}$.

На графике функции $y_1 = x^2 + 1$ отмечаем выбранные точки:

$$M_0\ (0;\ 1),\ M_1\ (1;\ 2),\ M_2\ (2;\ 5).$$

Извлекаем корень кубический из ординат этих точек:

а) $M_0(0;\ 1)$: $y_1 = 1$, отсюда $y = \sqrt[3]{y_1} = 1$, получаем точку $N_0(0;\ 1)$;

б) $M_1(1;\ 2)$: $y_1 = 2$, отсюда $y = \sqrt[3]{2}$, получаем точку $N_1(1;\ \sqrt[3]{2})$;

в) $M_2(2;\ 5)$: $y_1 = 5$, отсюда $y = \sqrt[3]{5}$, получаем точку $N_2(2;\ \sqrt[3]{5})$.

График можно дополнить точкой $N_3\ (0{,}1;\ \sqrt[3]{1{,}01})$.

3. $y = 2^{x^2-2x-3}$ (рис. 82).

I. Область определения — вся числовая ось.

Граничные значения: $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{x^2-2x-3} = +\infty$.

II. $y_1 = x^2 - 2x - 3$, $y = 2^{y_1}$.

Отмечаем точки на графике функции $y_1 = x^2 - 2x - 3$.

$$M_0\ (1;\ -4),\ M_1\ (2;\ -3),\ M_2\ (3;\ 0).$$

Возводим основание 2 в степень с показателем, равным ординате указанной точки. При этом точке $M_0\ (1;\ -4)$ графика функции $y_1 = x^2 - 2x - 3$ будет соответствовать точка $N_0\left(1;\ \frac{1}{16}\right)$ графика функции $y = 2^{y_1}$, точке $M_1\ (2;\ -3)$ — точка $N_1\left(2;\ \frac{1}{8}\right)$, точке $M_2\ (3;\ 0)$ — точка $N_2\ (3;\ 1)$. Наносим точки N_0, N_1, N_2 на нижний рисунок и соединяем их плавной кривой. Ввиду симметрии графика функции $y_1 = x^2 - 2x - 3$ относительно прямой $x = 1$ искомый график также будет симметричен относительно этой прямой.

4. $y = \log_2(-x^2 + 2x + 8)$ (рис. 83).

I. Область определения: $-x^2 + 2x + 8 > 0$, откуда $-2 < x < 4$. Граничные значения:

$$\lim_{x\to-2+0} \log_2(-x^2 + 2x + 8) = -\infty;\quad \lim_{x\to 4-0} \log_2(-x^2 + 2x + 8) = -\infty.$$

Имеются две вертикальные асимптоты: $x = -2$; $x = 4$.

II. $y_1 = -x^2 + 2x + 8$, $y = \log_2 y_1$.

Выбранные точки графика функции $y_1 = -x^2 + 2x + 8$:

$$M_0\ (1;\ 9),\ M_1\ (2;\ 8),\ M_2\ (1 + 2\sqrt{2};\ 1).$$

Соответствующие точки графика искомой функции:

$$N_0\ (1;\ \log_2 9),\ N_1\ (2;\ 3),\ N_2\ (1 + 2\sqrt{2};\ 0).$$

Так как парабола $y_1 = -x^2 + 2x + 8$ симметрична относительно прямой $x = 1$, то и искомый график симметричен относительно этой прямой (рис. 83).

5. $y = |x^2 - 4x + 1|$ (рис. 84).

Здесь $y_1 = x^2 - 4x + 1$, $y = |y_1|$.

Строим график функции $y_1 = x^2 - 4x + 1$, а затем ту часть параболы, которая расположена ниже оси x, зеркально отражаем относительно оси абсцисс.

З а м е ч а н и е. Аналогичное построение проводится для графика любой функции вида $y = |f(x)|$. Схема построения такого гра-

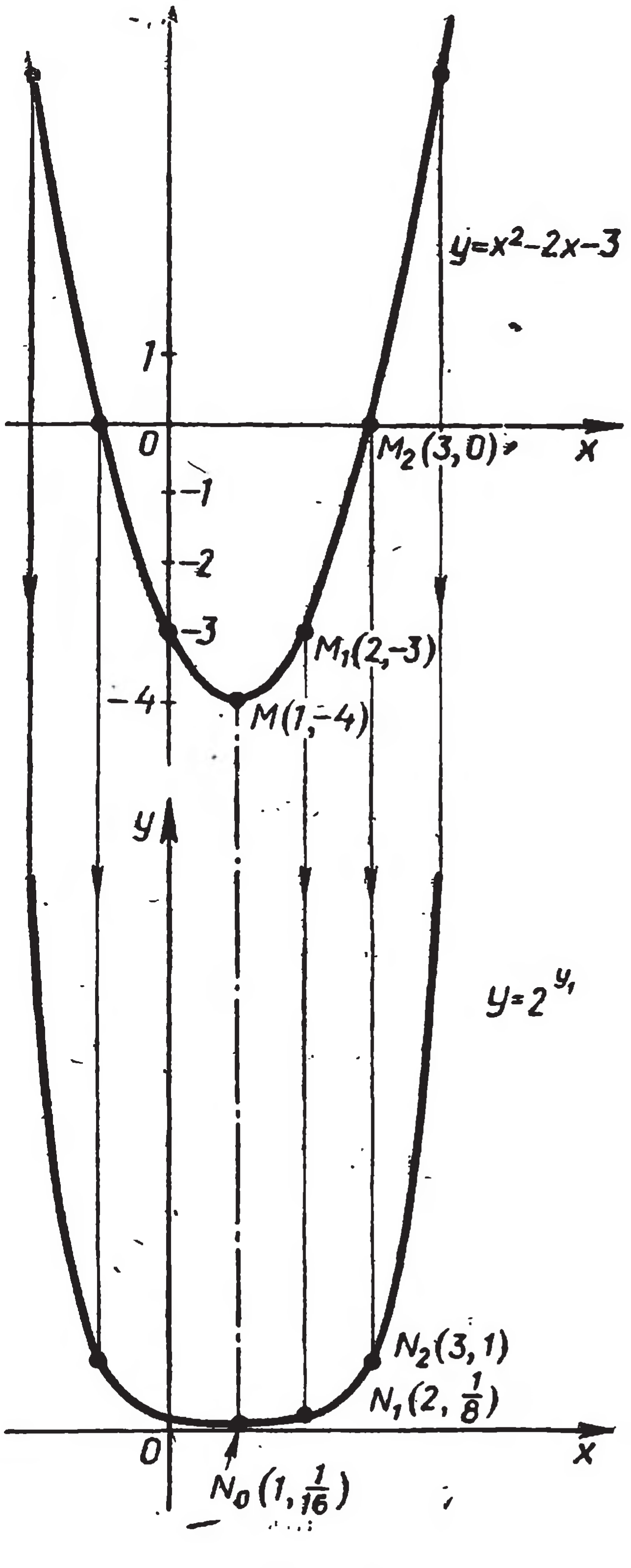

Рис. 82

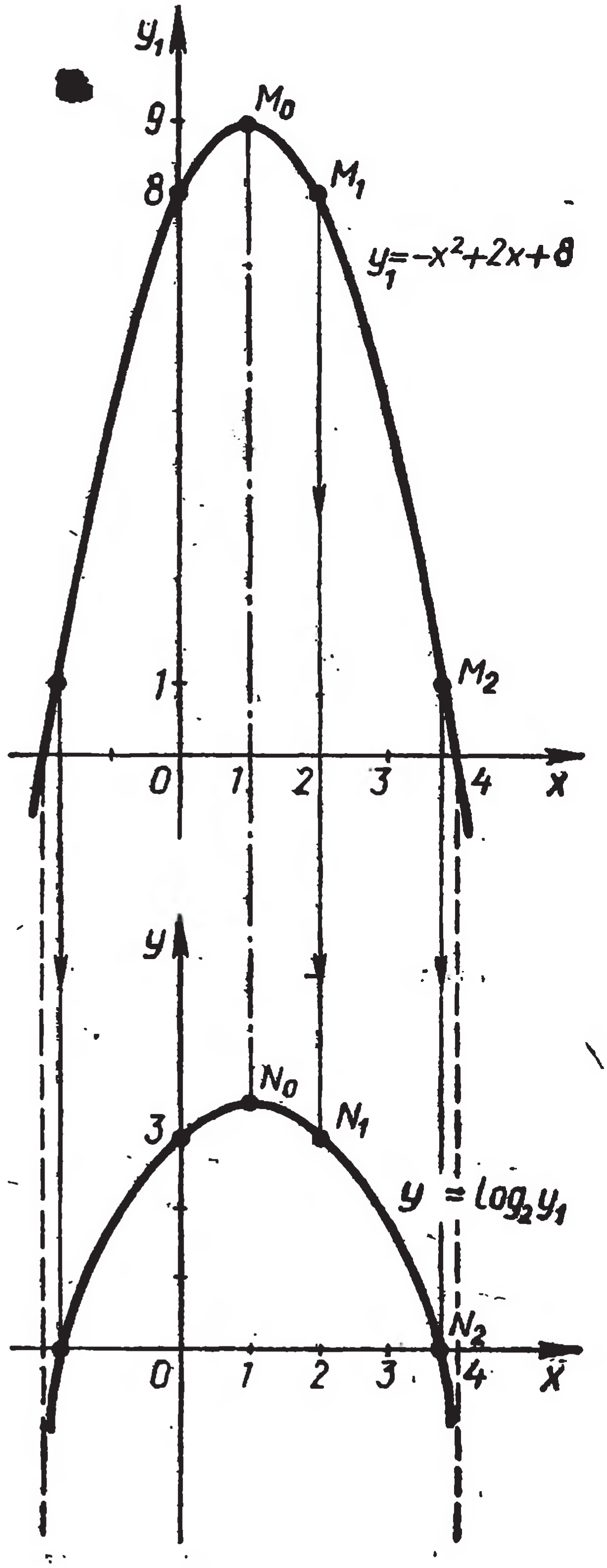

Рис. 83

фика следующая: сначала строится график функции $y_1 = f(x)$, затем все части графика, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отражаются относительно этой оси (рис. 85).

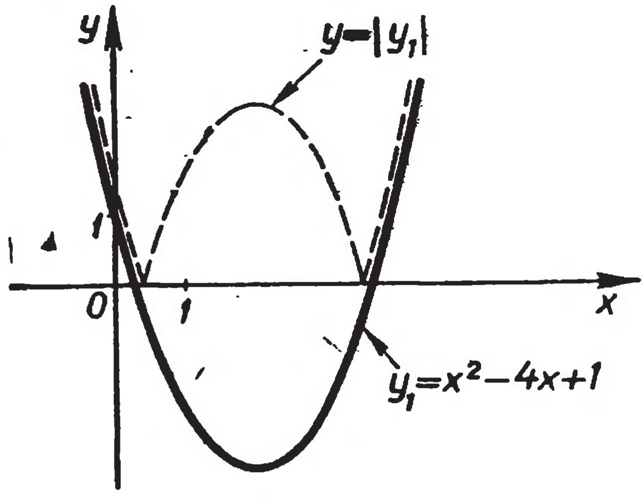

Рис. 84

6. $y = \frac{1}{-x^2 - 4x + 12}$ (рис. 86).

I. Область определения — вся числовая ось, за исключением точек $x = 2$, $x = -6$.

Граничные значения:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x^2-4x+12} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x^2-4x+12} = 0;$$

$$\lim_{x\to-6-0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-6+0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to2-0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to2+0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = -\infty.$$

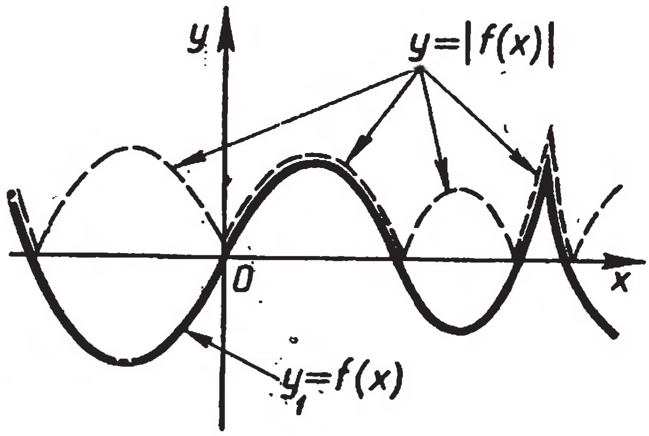

Рис. 85

Имеются две вертикальные асимптоты $x = 2$, $x = -6$ и одна горизонтальная асимптота $y = 0$.

II. $y_1 = -x^2 - 4x + 12$, $y = \frac{1}{y_1}$.

Выбранные точки графика функции $y_1 = -x^2 - 4x + 12$:

$$M_0(-2;\ 16),\ M_1(0;\ 12),\ M_2(3;\ -9).$$

Соответствующие точки графика искомой функции:

$$N_0\left(-2;\ \frac{1}{16}\right),\ N_1\left(0;\ \frac{1}{12}\right),\ N_2\left(3;\ -\frac{1}{9}\right).$$

График симметричен относительно прямой $x = -2$ (рис. 86).

7. $y = \cos(x^2 - 4x + 1)$ (рис. 87).

I. Область определения — вся числовая ось.

Не имеет смысла говорить о граничных значениях, так как не существует пределов функции при $x \to \pm\infty$.

II. Здесь $y_1 = x^2 - 4x + 1$, $y = \cos y_1$.

Строим график функции $y_1 = x^2 - 4x + 1$. Размечаем ось y_1 точками $\pm\frac{\pi}{2}$, π; $\frac{3\pi}{2}$, 2π, ...

На графике функции $y_1 = x^2 - 4x + 1$ находим точки с соответствующими ординатами.

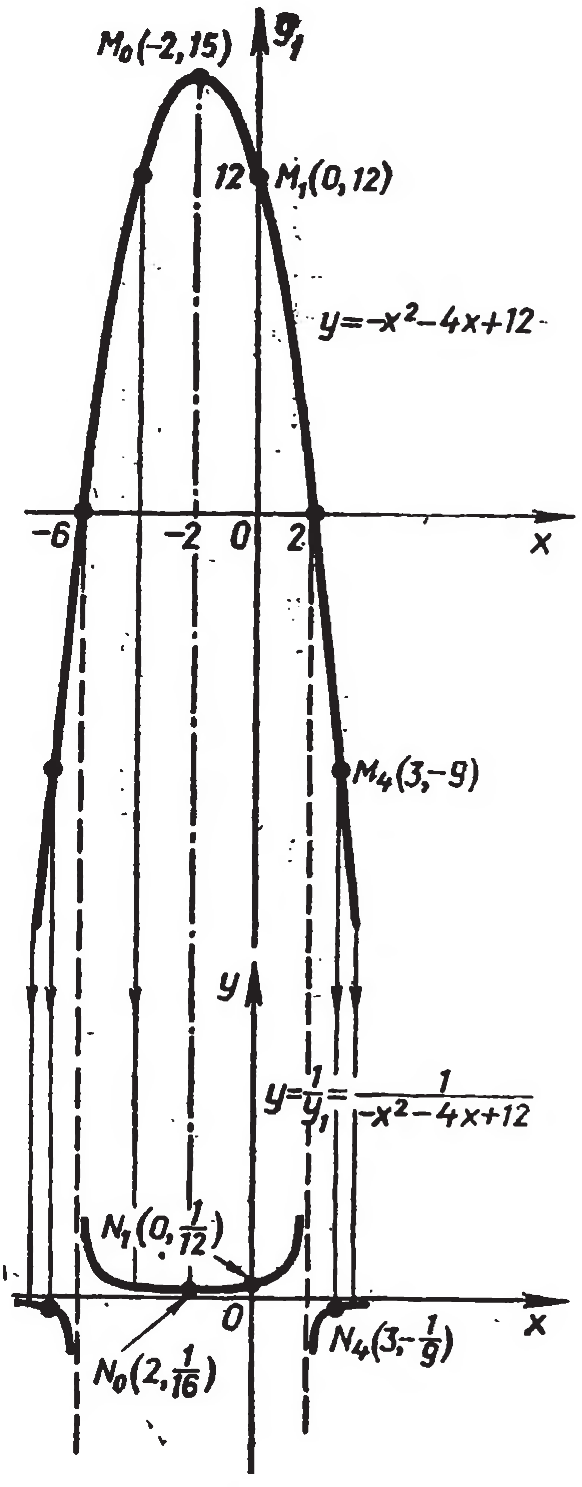

Рис. 86

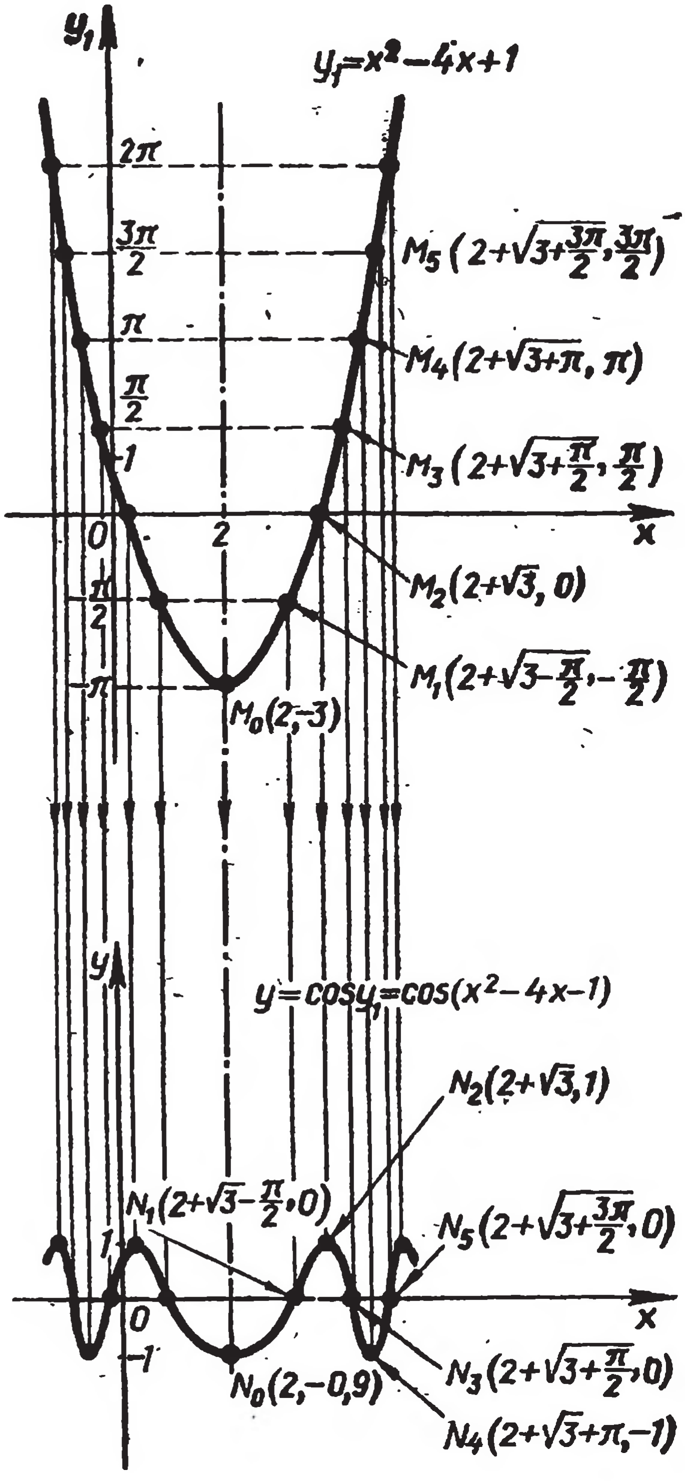

Рис. 87

Выбранные точки графика функции $y_1 = x^2 - 4x + 1$:

$$M_0(2;\ -3),\ M_1\left(2+\sqrt{3-\frac{\pi}{2}};\ -\frac{\pi}{2}\right),\ M_2(2+\sqrt{3};\ 0),$$

$$M_3\left(2+\sqrt{3+\frac{\pi}{2}};\ \frac{\pi}{2}\right),\ M_4(2+\sqrt{3+\pi};\ \pi),$$

$$M_5\left(2+\sqrt{3+\frac{3\pi}{2}};\ \frac{3\pi}{2}\right).$$

Соответствующие точки искомого графика $y = \cos y_1$:

$$N_0(2;\ \cos(-3)\approx -0{,}9),\ N_1\left(2+\sqrt{3-\frac{\pi}{2}};\ 0\right),$$

$$N_2\left(2+\sqrt{3};\ 1\right),$$

$$N_3\left(2+\sqrt{3+\frac{\pi}{2}};\ 0\right),$$

$$N_4\left(2+\sqrt{3+\pi};\ -1\right),$$

$$N_5\left(2+\sqrt{3+\frac{3\pi}{2}};\ 0\right).$$

Точки N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 наносим на нижний рисунок, соединяем плавной кривой и учитываем симметрию графика относительно прямой $x = 2$.

8. $y = \arcsin\left(\frac{1}{2} + x^2\right)$ (рис. 88).

I. Область определения: $x^2 + \frac{1}{2} \leqslant 1$, откуда

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Граничные значения: при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $y = \frac{\pi}{2}$.

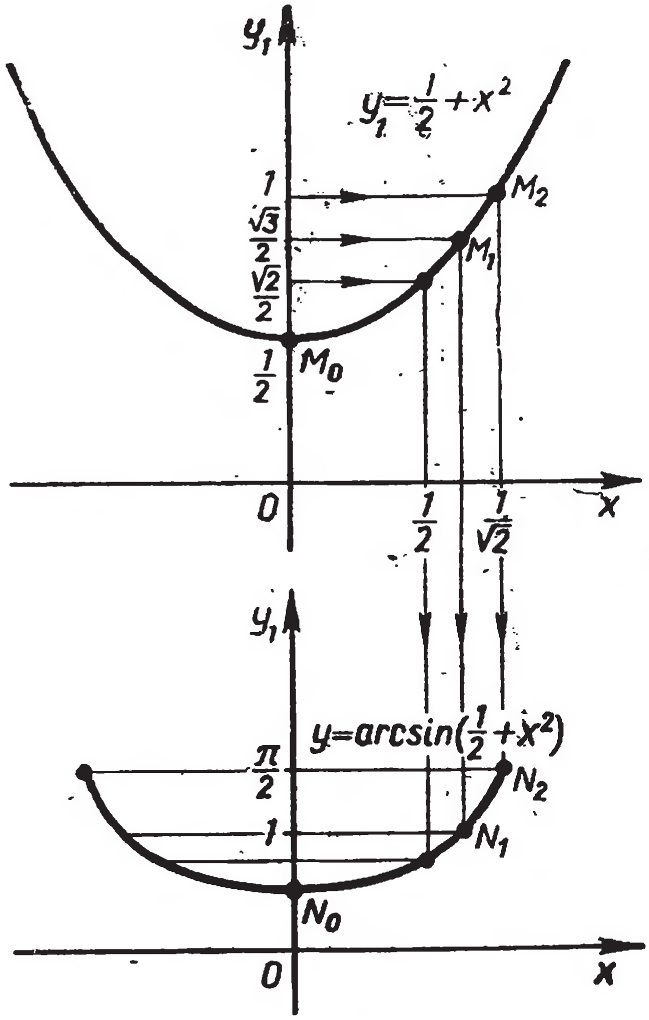

Рис. 88

Функция четная, т. е. график ее симметричен относительно оси y.

II. Здесь $y_1 = \frac{1}{2} + x^2$, $y = \arcsin y_1$.

Выбранные точки на графике функции $y_1 = \frac{1}{2} + x^2$:

$$M_0\left(0;\ \frac{1}{2}\right),\ M_1\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Соответствующие точки искомого графика:

$$N_0\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right),\quad N_1\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}};\ \frac{\pi}{3}\right).$$

Наносим точки N_0 и N_1, а также граничные точки на нижний рисунок и строим эскиз графика, учитывая его симметрию относительно оси y.

§ 13. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $y = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$

Как известно, графиком дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$ служит гипербола, ветви которой симметричны относительно точки $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$.

Нетрудно проверить, что для любого действительного α и $x_1 = -\frac{d}{c} + \alpha$, $x_2 = -\frac{d}{c} - \alpha$ выполняется равенство $y_1 - \frac{a}{c} = -\left(y_2 - \frac{a}{c}\right)$, где $y_1 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}$, $y_2 = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}$.

1. $y = \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$ (рис. 89).

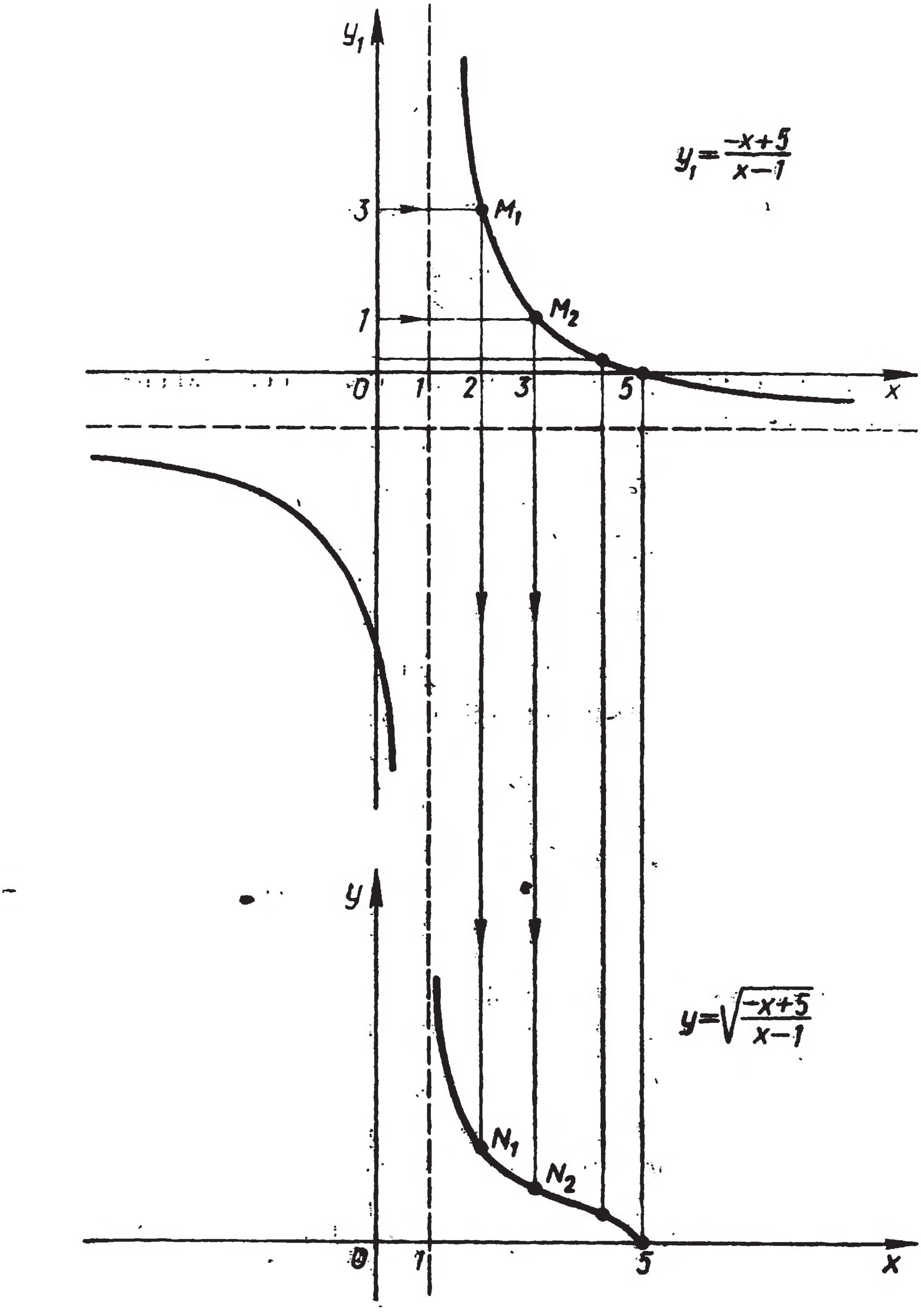

Рис. 89

I. Область определения:

$$\begin{cases} \dfrac{5-x}{x-1} \geqslant 0, \text{ откуда } 1 < x \leqslant 5. \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Граничные значения: $\lim\limits_{x \to 1+0} \sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}} = +\infty$, $y = 0$ при $x = 5$.
Имеется вертикальная асимптота $x = 1$.

II. $y_1 = \dfrac{5-x}{x-1}$, $y = \sqrt{y_1}$; при $x \to 1+0$ $y_1 \to +\infty$.

Выбранные точки на графике функции $y_1 = \dfrac{5-x}{y-1}$: $M_1(2;\ 3)$, $M_2(3;\ 1)$.

Соответствующие точки искомого графика $y = \sqrt{y_1}$: $N_1(2;\ \sqrt{3})$, $N_2(3;\ 1)$.

График функции представлен на рис. 89.

2. $y = 3^{\frac{x+3}{2x-2}}$ (рис. 90).

I. Область определения — вся числовая ось, кроме $x = 1$. Граничные значения:

$$\lim_{x \to -\infty} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = \sqrt{3}; \quad \lim_{x \to 1-0} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = 0;$$

$$\lim_{x \to 1+0} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = +\infty; \quad \lim_{x \to \infty} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = \sqrt{3}.$$

Отсюда следует, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой для графика нашей функции, а прямая $y = \sqrt{3}$ — горизонтальной асимптотой.

II. Здесь $y_1 = \dfrac{x+3}{2x-2}$, $y = 3^{y_1}$.

Строим график дробно-линейной функции:
при $x \to \infty$ $y_1 \to \dfrac{1}{2}$; при $x \to 1-0$ $y_1 \to -\infty$; при $x \to 1+0$ $y_1 \to +\infty$.

Выбранные точки на графике функции $y_1 = \dfrac{x+3}{2x+2}$:

$$M_0(-3;\ 0),\ M_1\left(0;\ -\frac{3}{2}\right),\ M_2\left(2;\ \frac{5}{2}\right),\ M_3(5;\ 1).$$

Соответствующие им точки искомого графика:

$$N_0(-3;\ 1),\ N_1\left(0;\ \frac{1}{3\sqrt{3}}\right),\ N_2(2;\ 9\sqrt{3}),\ N_3(5;\ 3).$$

График функции $y = 3^{\frac{x+3}{2x-2}}$ представлен на рис. 90.

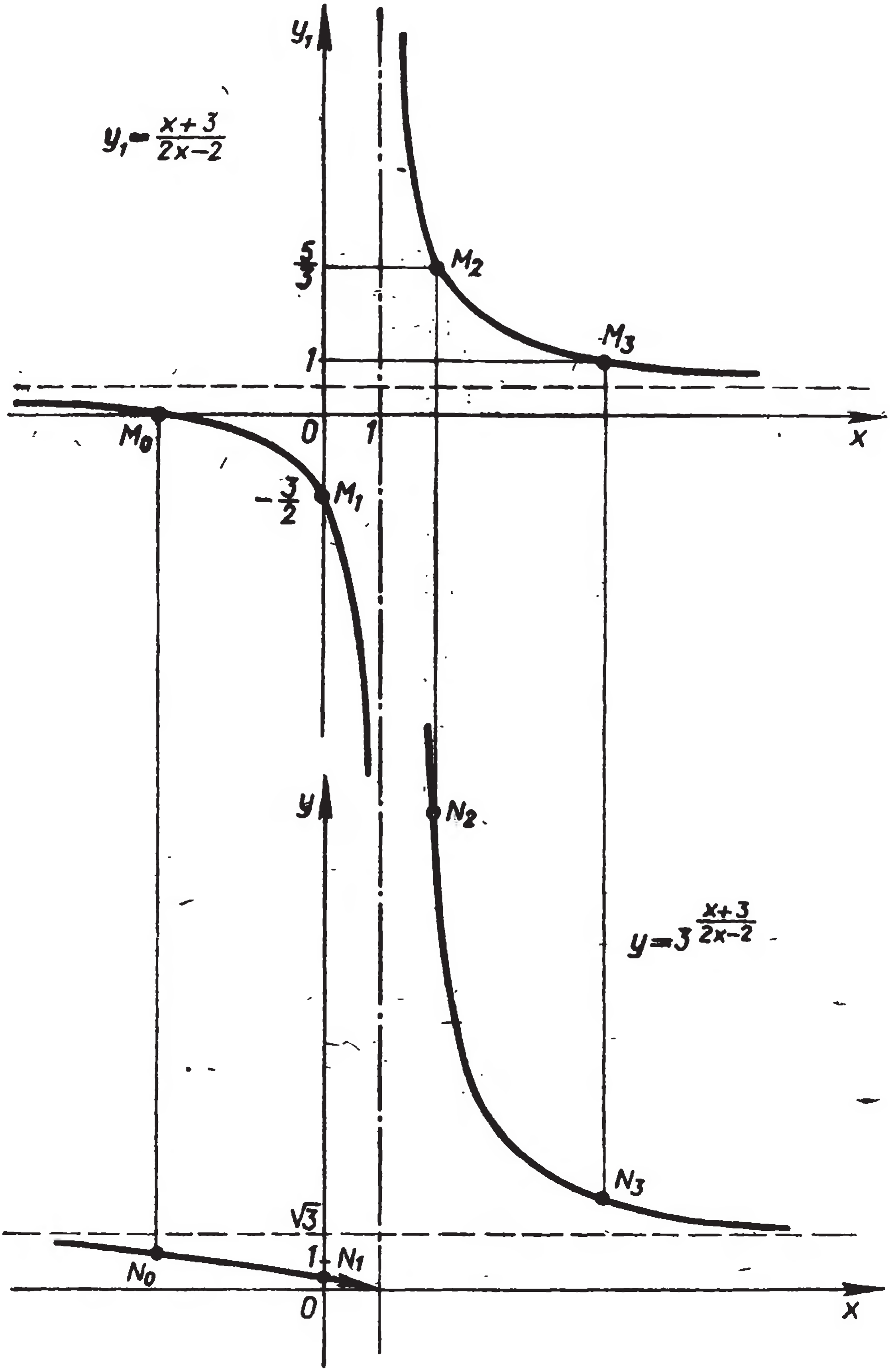

Рис. 90

3. $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{-2x+2}{x+1}\right) = -\log_2\left(\frac{-2x+2}{x+1}\right)$ (рис. 91).

I. Решаем неравенство $\frac{-2x+2}{x+1} > 0$, откуда $-1 < x < 1$. Интервал $]-1, 1[$ служит областью определения нашей функции.

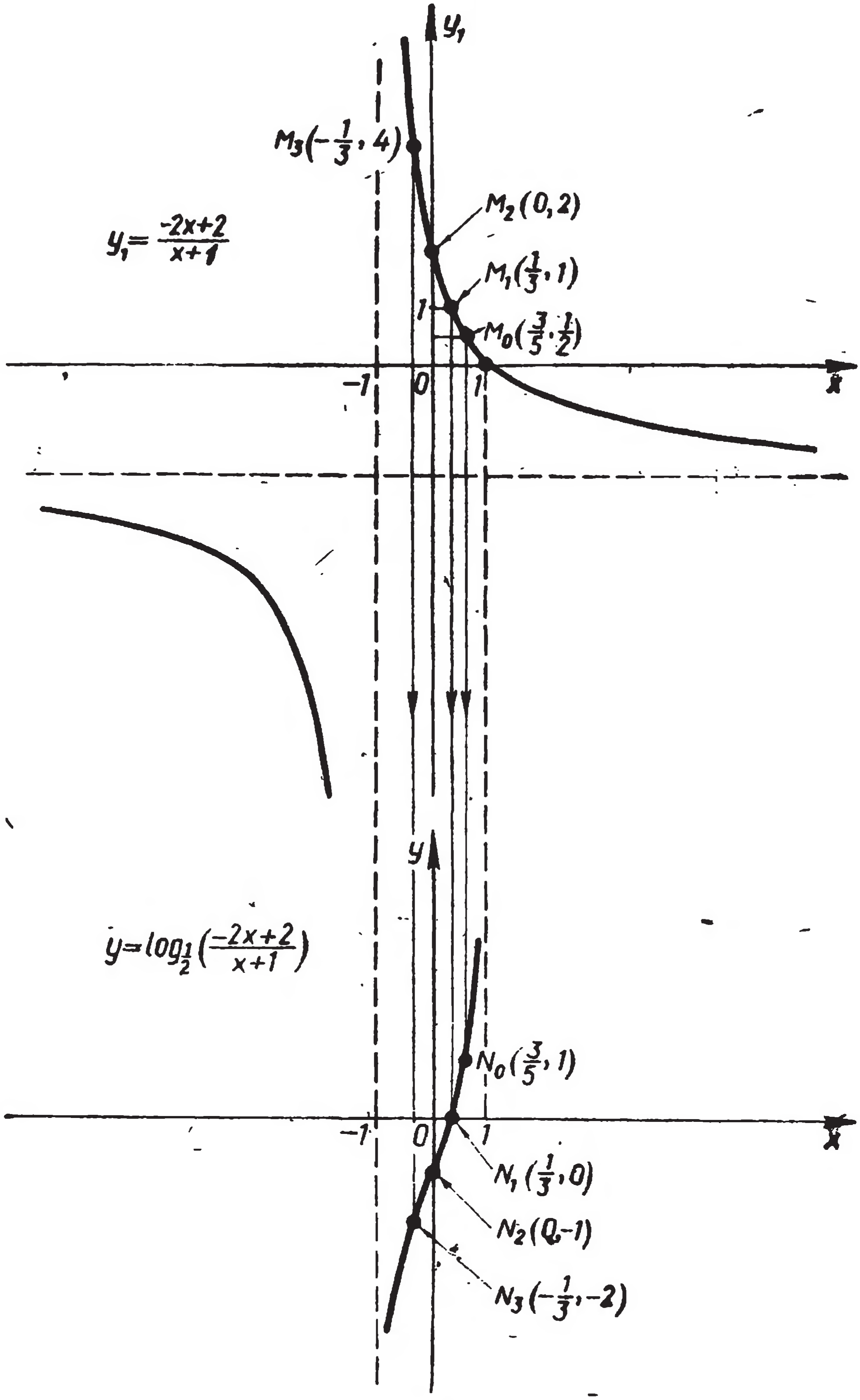

Рис. 91

Граничные значения:

$$\lim_{x\to -1+0}\left[-\log_2\left(\frac{-2x+2}{x+1}\right)\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left[-\log_2\left(\frac{-2x+2}{x+1}\right)\right] = +\infty.$$

Таким образом, прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются вертикальными асимптотами.

II. $y_1 = \frac{-2x+2}{x+1}$, $y = -\log_2 y_1$.

Строим график дробно-линейной функции: при $x \to \infty$ $y_1 \to -\infty$; при $x \to -1-0$ $y_1 \to -\infty$; при $x \to -1+0$ $y_1 \to +\infty$.

Выбранные точки на графике функции $y_1 = \frac{-2x+2}{x+1}$:

$$M_0\left(\frac{3}{5};\ \frac{1}{2}\right),\ M_1\left(\frac{1}{3};\ 1\right),\ M_2(0;\ 2),\ M_3\left(-\frac{1}{3};\ 4\right).$$

Соответствующие точки графика функции $y = -\log_2 y_1$:

$$N_0\left(\frac{3}{5};\ 1\right),\ N_1\left(\frac{1}{3};\ 0\right),\ N_2(0;\ -1),\ N_3\left(-\frac{1}{3};\ -2\right).$$

График искомой функции представлен на рис. 91.

4. $y = \operatorname{tg}\frac{x-2}{x+2}$.

Здесь $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$, $y = \operatorname{tg} y_1$.

Строим график дробно-линейной функции $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$.

Отметим, что при $x \to \infty$ $y_1 \to 1$; при $x \to -2-0$ $y \to +\infty$; при $x \to -2+0$ $y_1 \to -\infty$.

Те значения x, для которых значения $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$ будут равны $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$, ..., являются точками разрыва нашей функции, а соответствующие прямые, как легко показать, служат вертикальными асимптотами. При $x \to \pm\infty$ $y \to \operatorname{tg} 1 \approx 1{,}7$.

Для упрощения построения эскиза графика $y = \operatorname{tg}\frac{x-2}{x+2}$ абсциссы характерных точек можно не вычислять. Достаточно разметить ось y_1 точками 0, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\pi$, ..., спроектировать их на линию $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$ и полученные таким образом точки графика функции $y_1 = \frac{x-2}{y+2}$ спроектировать в свою очередь на ось x нижнего рисунка. Вычисляя значения тангенса от ординат характерных точек M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, ..., получим ординаты точек искомого графика: N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, ...

§ 14. ЭСКИЗИРОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Под эскизированием графика функции мы будем понимать построение эскиза (наброска) графика функции без проведения полного исследования функции по общей схеме (гл. II), однако такого эскиза, который достаточно точно отражает основные элементы поведения функции, а именно поведение функции в окрестностях граничных точек и точек разрыва, в нулях и на бесконечности.

Для дальнейшего нам потребуется понятие эквивалентности функций.

Определение. Бесконечно малые при $x \to a$ (или бесконечно большие) функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными ($\alpha(x) \sim \beta(x)$) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

(Число a может быть конечным или бесконечным.)

Геометрически тот факт, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$, означает, что в некоторой, вообще говоря, достаточно малой окрестности точки $x = a$ график функции $\alpha(x)$ может быть заменен на график эквивалентной ей функции $\beta(x)$ с точностью тем большей, чем меньше выбранная окрестность (рис. 92).

Рассмотрим примеры эквивалентных функций. При $x \to 0$ имеем:

1. $\sin x \sim x$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\operatorname{tg} x \sim x$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

При $x \to +\infty$ имеем:

1. $x(x-3)(x+1) \sim x^3$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(x-3)(x+1)}{x^3} = 1.$$

2. $x^3 \sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{\frac{11}{3}}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \sqrt[3]{(x-2)^2}}{x^{\frac{11}{3}}} = 1.$$

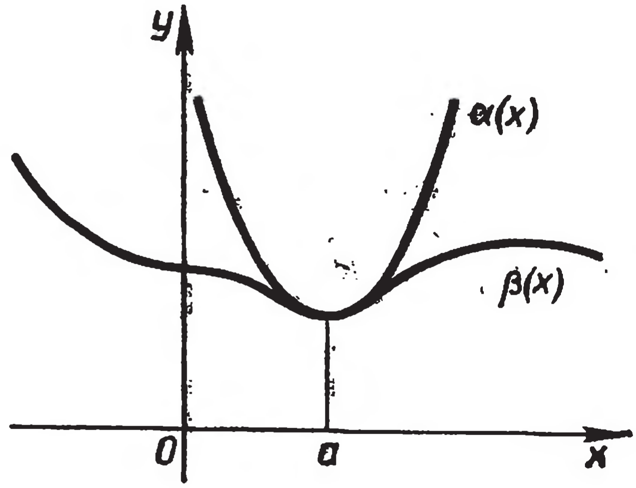

Рис. 92

При $x \to +1$ имеем:

1. $\frac{x}{(x-1)(x-2)} \sim -\frac{1}{x-1}$, так как $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{(x-1)(x-2)} : \frac{(-1)}{x-1}\right) = 1.$

2. $x^3\sqrt[3]{(x-1)^2} \sim \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 1.$

При $x \to 2$ имеем:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} \sim \frac{2}{x-2},\ \text{так как}\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{(x-1)(x-2)} : \frac{2}{x-2}\right) = 1.$$

Схема эскизирования графика функции выглядит следующим образом:

I. Нахождение области определения, граничных точек области определения и точек разрыва.

II. Определение четности (нечетности), периодичности функций.

III. Определение нулей функции.

IV. Исследование поведения функции в окрестностях граничных точек, точек разрыва, в нулях и на бесконечности. Необходимо каждый этап исследования функции по этой схеме сопровождать соответствующим построением.

§ 15. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

1. $y = x^2(x-2)(x+1)$ (рис. 93).

I. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет.

II. Функция общего вида.

III. Функция обращается в нуль при $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$.

IV. Поведение функции в нулях:

а) при $x \to 0$ $x^2(x-2)(x+1) \sim -2x^2$;

б) при $x \to -1$ $x^2(x-2)(x+1) \sim -3(x+1)$;

в) при $x \to 2$ $x^2(x-2)(x+1) \sim 12(x-2)$.

Поведение функции на бесконечности:

при $x \to +\infty$ $x^2(x-2)(x+1) \sim x^4$;

при $x \to -\infty$ $x^2(x-2)(x+1) \sim x^4$.

Наносим полученные результаты на рис. 93 и отдельные части (!!!)

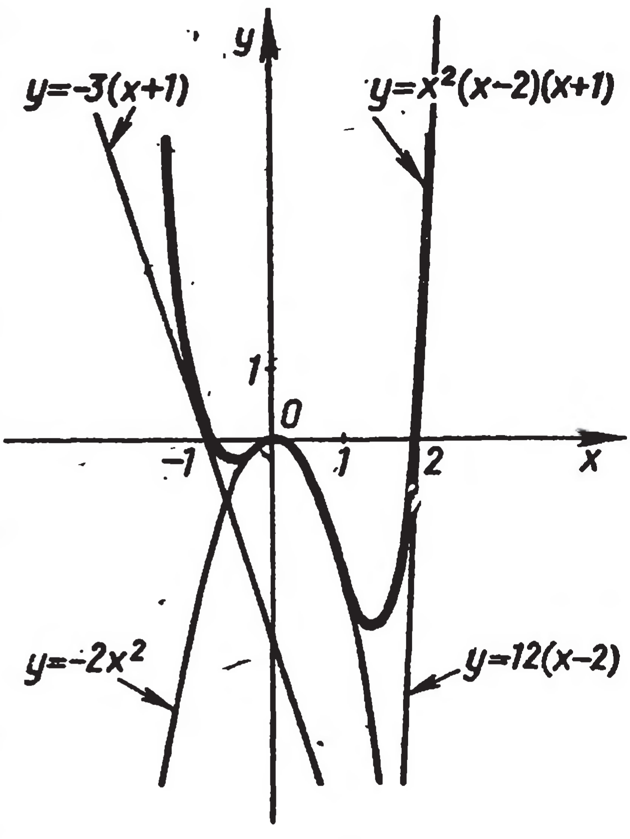

Рис. 93

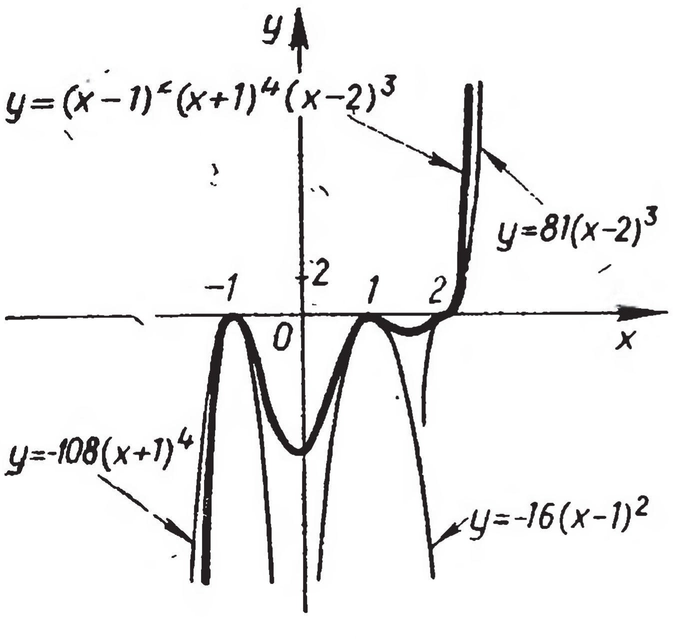

Рис. 94

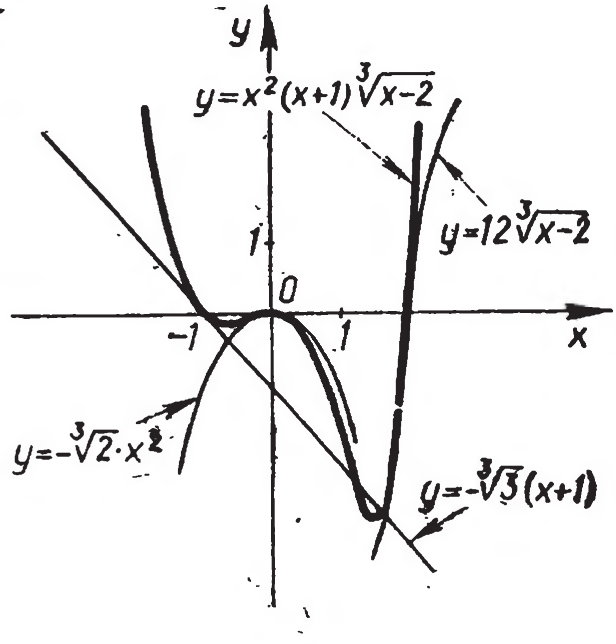

Рис. 95

графика (в силу непрерывности) соединяем сплошной линией. Идея эскизирования графиков как раз и состоит в том, чтобы соединять сплошной линией не отдельные точки графика, а отдельные его части (куски). При необходимости полученный эскиз всегда можно уточнить с помощью методов главы II.

2. $y = (x-1)^2 (x+1)^4 (x-2)^3$ (рис. 94).

I. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет.

II. Функция общего вида.

III. Нули функции в точках $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$.

IV. Поведение функции:

а) при $x \to -1$ $(x-1)^2 (x+1)^4 (x-2)^3 \sim -108 (x+1)^4$;

б) при $x \to 1$ $(x-1)^2 (x+1)^4 (x-2)^3 \sim -16 (x-1)^2$;

в) при $x \to 2$ $(x-1)^2 (x+1)^4 (x-2)^3 \sim 81 (x-2)^3$;

г) при $x \to \pm\infty$ $(x-1)^2 (x+1)^4 (x-2)^3 \sim x^9$.

3. $y = x^2 (x+1) \sqrt[3]{x-2}$ (рис. 95).

I. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет.

II. Функция общего вида.

III. Нули функции в точках $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

IV. Поведение функции:

а) при $x \to -1$ $x^2 (x+1) \sqrt[3]{x-2} \sim -\sqrt[3]{3}(x+1)$;

б) при $x \to 0$ $x^2 (x+1) \sqrt[3]{x-2} \sim -\sqrt[3]{2}\, x^2$;

в) при $x \to 2$ $x^2 (x+1) \sqrt[3]{x-2} \sim 12 \sqrt[3]{x-2}$;

г) при $x \to \pm\infty$ $x^2 (x+1) \sqrt[3]{x-1} \sim x^{3\frac{1}{3}}$.

4. $y = x^3 \sqrt[3]{(x-2)^2}$ (рис. 96).

I. Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет.

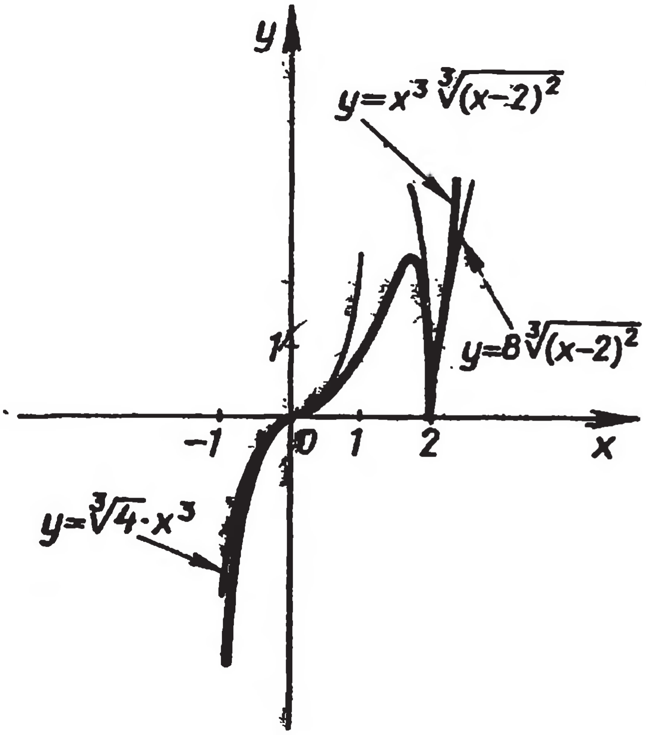

Рис. 96

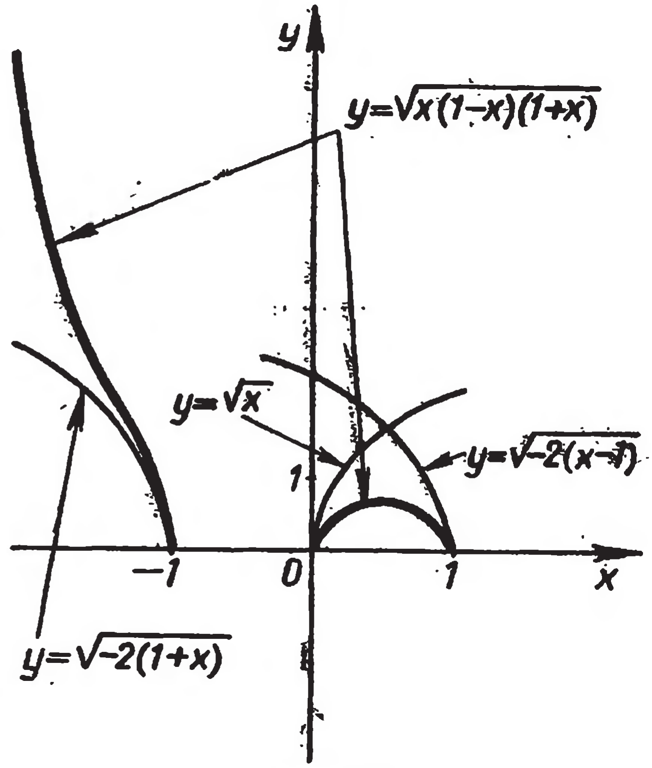

Рис. 97

II. Функция общего вида.

III. Функция обращается в нуль при $x=0$, $x=2$.

IV. Поведение функции:

а) при $x \to 0$ $x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim \sqrt[3]{4}\cdot x^3$;

б) при $x \to 2$ $x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim 8\sqrt[3]{(x-2)^2}$;

в) при $x \to \pm\infty$

$$x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{\frac{11}{3}}.$$

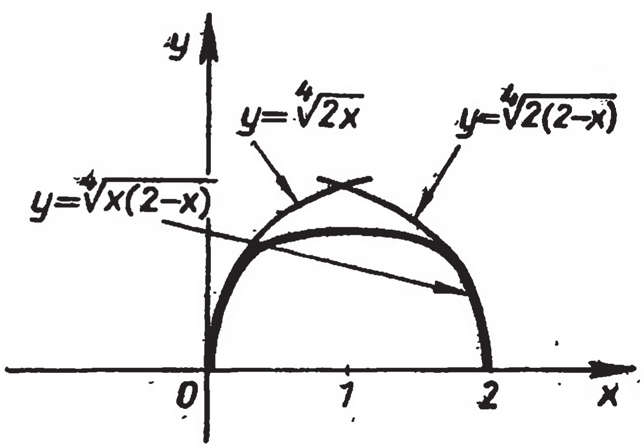

Рис. 98

5. $y=\sqrt{x(1-x)(1+x)}$ (рис. 97).

I. Область определения находим из решения неравенства $x(1-x)(1+x) \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

II. Функция общего вида.

III. Нули функции в точках $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

IV. Поведение функции:

а) при $x \to 0+0$ $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{x}$;

б) при $x \to -1-0$ $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(1+x)}$;

в) при $x \to 1-0$ $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(x-1)}$;

г) при $x \to -\infty$ $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-x^3}$.

6. $y=\sqrt[4]{x(2-x)}$ (рис. 98).

I. Область определения находим из решения неравенства $x(2-x) \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant x \leqslant 2$.

II. Функция общего вида.

III. Нули функции в точках $x = 0$, $x = 2$.

IV. Поведение функции:

а) при $x \to 0+0$ $\sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x}$;

б) при $x \to 2-0$ $\sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2-x}$.

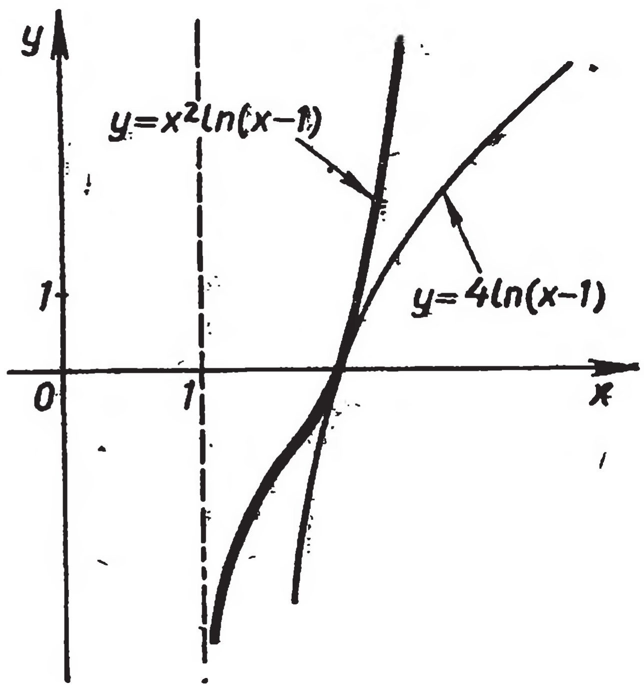

Рис. 99

7. $y = x^2 \ln(x-1)$ (рис. 99).

I. Область определения находим из решения неравенства $x - 1 > 0$, откуда $x > 1$.

II. Функция общего вида.

III. Нуль функции в точке $x = 2$.

IV. Поведение функции:

при $x \to 2$ $x^2 \ln(x-1) \sim 4\ln(x-1)$;

при $x \to 1+0$ $x^2 \ln(x-1) \sim \ln(x-1) \to -\infty$.

Отсюда следует, что $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Поведение функции на бесконечности:

при $x \to +\infty$ $x^2 \ln(x-1) \sim x^2 \ln x$. Заметим, что при $x > e$ $x^2 \ln x > x^2$.

Таким образом, наша функция на бесконечности растет быстрее, чем x^2.

8. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (рис. 100).

I. Область определения — вся числовая ось.

II. Функция четная.

III. Нулей функция не имеет.

IV. Поведение функции: при $x \to \infty$ $\dfrac{1}{1+x^2} \sim \dfrac{1}{x^2} \to 0$.

Таким образом, $y = 0$ есть горизонтальная асимптота.

Рассмотрим поведение функции при $x \to 0$. Так как при $x \to 0$ можно считать $|-x^2| < 1$, то по формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(-x^2)$ получим:

$$1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \ldots = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами прогрессии, найдем, что

$$\frac{1}{1+x^2} \sim 1 - x^2 \qquad \text{при } x \to 0.$$

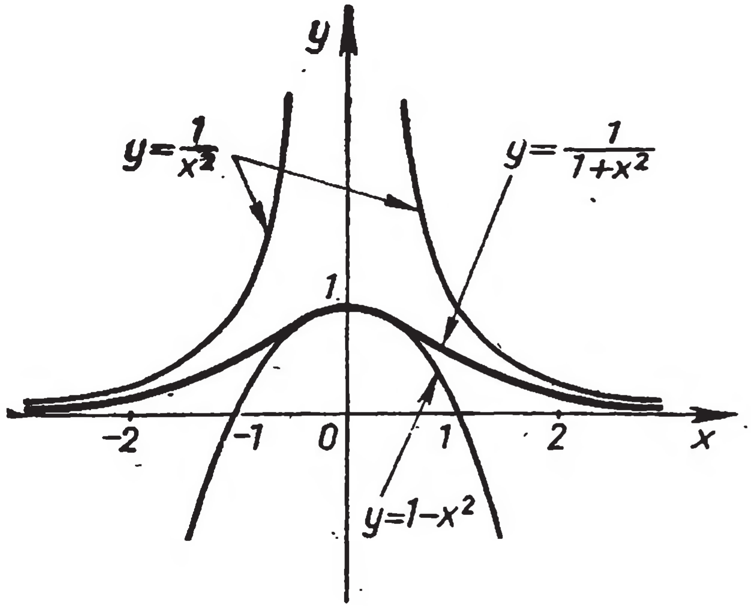

Рис. 100

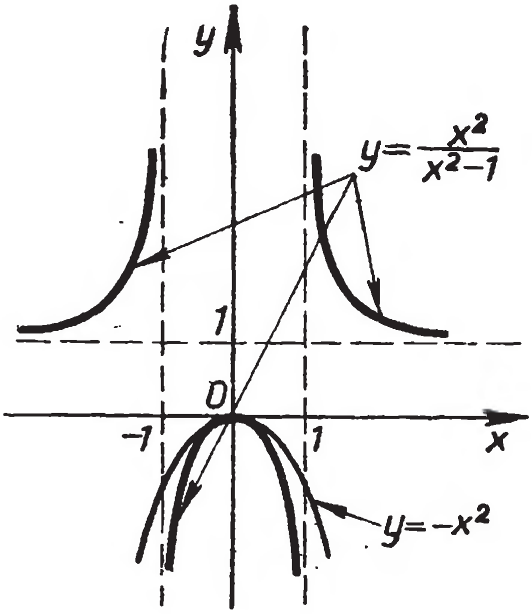

Рис. 101

9. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ (рис. 101).

I. Область определения — вся числовая ось, за исключением двух точек разрыва: $x = -1$, $x = 1$, в которых знаменатель обращается в нуль.

II. Функция четная.

III. Нуль функции в точке $x = 0$.

IV. Поведение функции:

$$\text{при } x \to 0 \quad \frac{x^2}{x^2 - 1} \sim -x^2;$$

$$\text{при } x \to \infty \quad \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \sim 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Этот результат также следует из формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{x^2} < 1$ $(x \to \infty)$:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots .$$

Таким образом, $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

Поведение функции в точках разрыва:

$$\text{при } x \to 1 \quad \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Отсюда $x = 1$, а также в силу четности и $x = -1$ — вертикальные асимптоты.

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$ (рис. 102).

I. Область определения — вся числовая ось, кроме точки разрыва $x = -1$, в которой знаменатель обращается в нуль.

II. Функция общего вида.

III. Нули функции в точках $x = 2$, $x = 2$.

IV. Поведение функции:

$$\text{при} \quad x \to -2 \quad \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \sim 4(x+2);$$

$$\text{при } x \to 2 \quad \frac{x^2-4}{x+1} \sim \frac{4}{3}(x-2);$$

$$\text{при } x \to -1 \quad \frac{x^2-4}{x+1} \sim \frac{-3}{x+1}.$$

Отсюда $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Поведение функции на бесконечности:

$$\text{при} \quad x \to \infty \quad \frac{x^2-4}{x+1} = \left(x - \frac{4}{x}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \left(x - \frac{4}{x}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots\right) = x - 1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \dots .$$

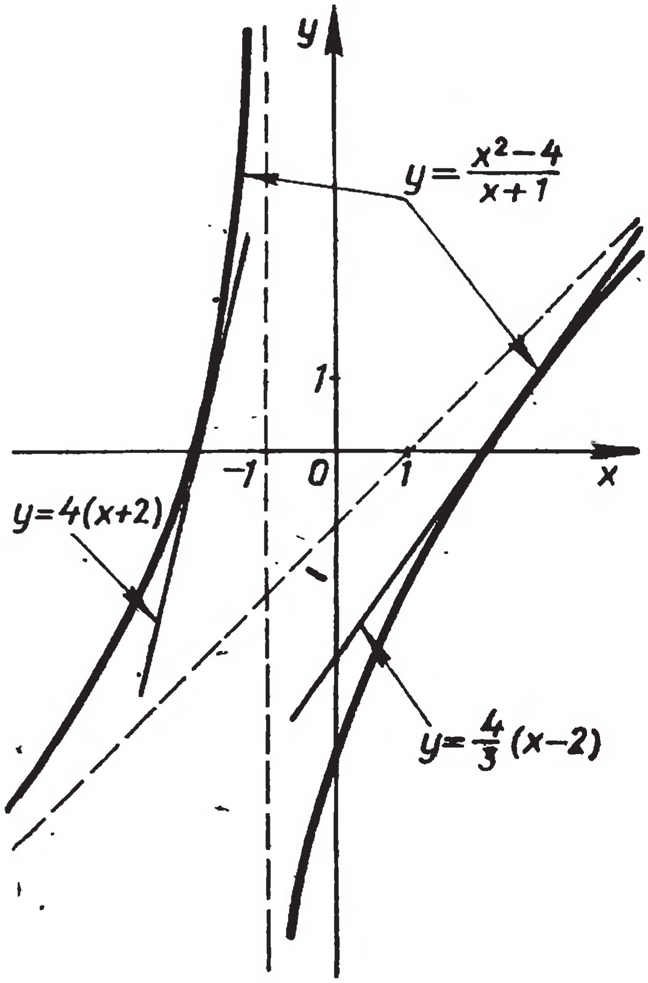

Рис. 102

Таким образом, при $x \to \infty$ $\frac{x^2-4}{x+1} \sim x - 1$.

Отсюда следует, что $y = x - 1$ есть наклонная асимптота.

11. $y = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ (рис 103).

I. Область определения находим из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x}{2-x} \geqslant 0, \\ 2 - x \neq 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 0 \leqslant x < 2.$$

II. Функция общего вида.

III. Нуль функции в точке $x = 0$.

IV. Поведение функции:

$$\text{при} \quad x \to 0+0 \quad x\sqrt{\frac{x}{2-x}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}};$$

$$\text{при} \quad x \to 2-0 \quad x\sqrt{\frac{x}{2-x}} \sim 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}} \to +\infty.$$

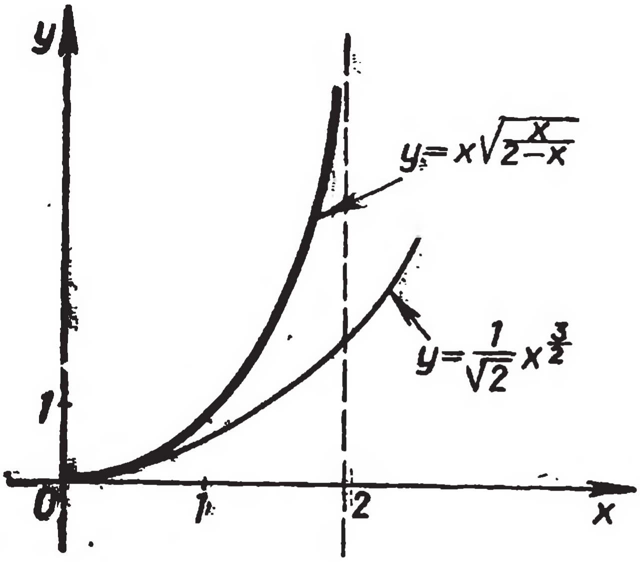

Рис. 103

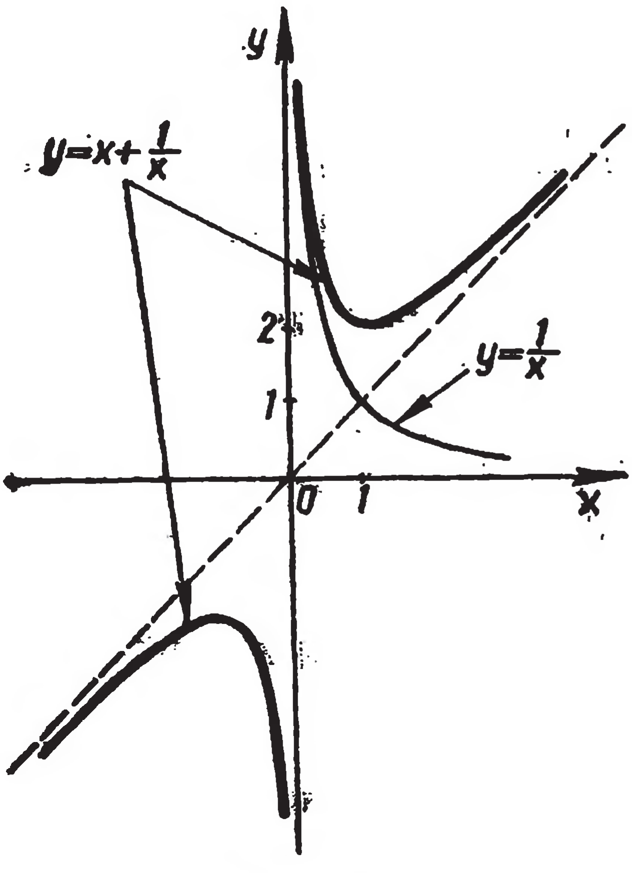

Рис. 104

Отсюда следует, что $x = 2$ — вертикальная асимптота.

12. $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 104).

I. Область определения — вся числовая ось, за исключением точки разрыва $x = 0$.

II. Функция нечетная.

III. Нулей функция не имеет.

IV. Поведение функции: при $x \to 0$ $x + \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ ($x = 0$ — вертикальная асимптота); при $x \to \infty$ $x + \frac{1}{x} \sim x$.

Поэтому $y = x$ — наклонная асимптота.

УПРАЖНЕНИЯ

Построить графики функций.

1. $y = x^2(1 - x^2)$.
2. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.
3. $y = x^3 - 3x + 2$.
4. $y = x^3 + 2x + 3$.
5. $y = (x^2 - 3x)(x - 1)^3$.
6. $y = \sqrt{x(4 - x^2)}$.
7. $y = \sqrt[3]{x^2}(x - 2)$.
8. $y = \sqrt[3]{x(1 - x^2)}$.
9. $y = \sqrt[3]{(1 - x)(2 + x)}$.
10. $y = \sqrt{x + 3}(x - 2)$.
11. $y = \frac{2}{x^2 - x + 1}$.
12. $y = \frac{1}{x - x^2 - 5}$.
13. $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$.
14. $y = \frac{x - 2}{x - x^2 - 6}$.
15. $y = \frac{1}{x^3 - x}$.
16. $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$.
17. $y = \frac{2x}{x^3 - 4}$.
18. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 9}$.
19. $y = \frac{x - 5}{x^2 + 2x}$.
20. $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$.

21. $y=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

22. $y=\frac{x^2}{9-x^2}$.

23. $y=\frac{(2x+1)x}{(x+3)(2-x)}$.

24. $y=\frac{x^3}{(1-x)(1+x^2)}$.

25. $y=\frac{x^2-3}{x+1}$.

26. $y=\frac{x^2+3}{x-1}$.

27. $y=\frac{x^3}{1+x^2}$.

28. $y=\frac{x^2-x}{x-2}$.

29. $y=\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}$.

30. $y=\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}}$.

31. $y=2+\sqrt{1-x}$.

32. $y=3^{-\frac{1}{x^2}}$.

33. $y=2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

34. $y=\frac{1}{2^x-1}$.

35. $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

36. $y=\frac{2^x+3^x}{3^x+1}$.

37. $y=\frac{3^x-2^x}{3^x-2^x}$.

38. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

39. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1}$.

40. $y=2^{\frac{1}{x-3}}$.

41. $y=\lg(x^2-2|x|+3)$.

42. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$.

43. $y=\lg(1-\lg x)$.

44. $y=\lg(\sqrt{x}-1)$.

45. $y=\lg(x^3-4x)$.

46. $y=\frac{1}{\lg(|x|+3)}$.

47. $y=\frac{1}{\lg\lg x}$.

48. $y=\frac{1}{\lg[\cos(x+1)]}$.

49. $y=\sin(x^2-1)$.

50. $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.

51. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$.

52. $y=\frac{3}{2\sin x-1}$.

53. $y=\frac{1}{0{,}5+\cos x}$.

54. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

55. $y=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

56. $y=\arccos(2^x)$.

57. $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x)$.

58. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Леонид Викторович Ершов
Рудольф Борисович Райхмист

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Зав. редакцией *Хабиб Р. А.*
Редактор *Антонова Л. В.*
Обложка художника *Николаева Б. Л.*
Художественный редактор *Карасик Е. Н.*
Технические редакторы *Махова Н. Н., Новоселова В. В.*
Корректор *В. Ф. Малышева.*

ИБ № 8106

Сдано в набор 17.11.83. Подписано к печати 08.06.84. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. типограф. № 3 Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,0. Усл. кр.-отт. 5,25. Уч.-изд. л. 4,51. Тираж 157 000 экз. Заказ 5912. Цена 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Иваново, ул. Типографская, 6.